Avaliação 1 - MA12 - 2015.1 - Gabarito

Questão 01 [2,0 pts]

Os números harmônicos H_j são definidos por

$$H_j = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k}, \text{para} \quad j \geqslant 1.$$

Mostre, por indução em n, que $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$, para todo $n \geqslant 0$.

Solução

Seja $P(n)$ a proposição: $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$, para todo $n \geqslant 0$.

Para $n = 0$ temos que $H_{2^0} = H_1 = 1 = 1 + \frac{0}{2}$.

Suponha agora que $P(n)$ é verdadeira para $n = k$, ou seja, $H_{2^k} \geqslant 1 + \frac{k}{2}$.

Resta provar que $P(k)$ implica $P(k+1)$.

De fato,

$$H_{2^{k+1}} = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{2^k} \frac{1}{j} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \geqslant 1 + \frac{k}{2} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \geqslant 1 + \frac{k}{2} + \left(2^{k+1} - 2^k\right) \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}.$$

e assim $P(k+1)$ é verdadeira.

Questão 02 [2,0 pts]

(a) Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente. Determine a razão dessa progressão.

(b) Os lados de um triângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão?

Solução

(a) Sejam a, aq e aq^2, com $q > 1$ os comprimentos dos lados do triângulo retângulo.
Então segue que $a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2$, ou seja, $1 + q^2 = q^4$.
Fazendo $t = q^2$ obtemos a equação $t^2 - t - 1 = 0$, cuja única solução positiva é $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e, portanto, $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

(b) Podemos supor que os comprimentos dos lados são a, aq e aq^2, com $q > 0$.

Pelas condições de existência de um triângulo devemos ter

$a < aq + aq^2, aq < a + aq^2$ e $aq^2 < a + aq$.

Dividindo todas as inequações por a e levando-se em conta que $q > 0$, temos que:

- $1 < q + q^2$ vale desde que $q > \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$;
- $q < 1 + q^2$ vale sempre; e
- $q^2 < 1 + q$ vale desde que $q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Portanto, os comprimentos dos lados de um triângulo são termos de uma progressão geométrica de razão q se, e somente se,

$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Questão 03 [**2,0 pts**]

Considere a_n a quantidade de sequências de n termos, todos pertencentes a

$\{0, 1\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

(a) Determine a_1 e a_2.

(b) Encontre uma relação de recorrência de segunda ordem para a sequência a_n.

(c) Resolva a equação do item (b), usando o item(a), para obter uma expressão de a_n que dependa apenas de n.

Solução

(a) $a_1 = 2$, pois as sequências 0 e 1 têm um termo e não possuem dois termos consecutivos iguais a 0. Além disso, $a_2 = 3$, pois as sequências $01, 10$ e 11 têm dois termos e não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

(b) Para $n \geq 3$ temos que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, pois as sequências com n termos podem ser obtidas a partir daquelas que têm $n-1$ termos acrescentando o termo 1 e daquelas que têm $n-2$ termos acrescentando 10.

(c) Devemos resolver a equação de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ com $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$.

A equação característica é $r^2 = r + 1$ e as suas raízes são dadas por

$r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Então, $a_n = C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Para determinar as constantes C_1 e C_2, podemos usar $a_1 = 2$ e $a_2 = 3$ e assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \\ C_1 \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2 \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $C_1 = \dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}$ e $C_2 = \dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}$.

Assim, segue que

$$a_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Questão 04 **[2,0 pts]**

Determine as taxas efetivas anuais equivalentes a:

(a) 24% ao ano, com capitalização semestral.

(b) 40% ao ano, com capitalização trimestral.

(c) i ao ano, capitalizado k vezes ao ano.

Solução

Pela **fórmula das taxas equivalentes**, temos que se a taxa de juros relativa a um determinado período de tempo é igual a i, então a taxa de juros relativa a n períodos de tempo é I, onde $1 + I = (1 + i)^n$.

(a) A taxa é de 24%/2=12% ao semestre. Logo $1 + I = (1 + i)^2$ e como $i = 0,12$, temos que $I = 1,12^2 - 1 = 1,2544 - 1 =$ 25,44% .

(b) Nesse caso a taxa é de 40%/4=10% ao trimestre. Logo $1 + I = (1 + i)^4$ e como $i = 0,1$, temos que $I = 1,1^4 - 1 = 1,4641 - 1 =$ 46,41% .

(c) A taxa relativa ao período de capitalização é i/k.
Logo $1 + I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$ e assim $I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$.

Questão 05 **[2,0 pts]**

Mostre que (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, existirem números reais A e B tais que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = An^2 + Bn$, para todo n inteiro positivo.

Solução

Suponha que (a_n) seja uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1. Mostraremos então que existem números reais A e B tais que $S_n = An^2 + Bn$.
Sabemos que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, com $a_n = a_1 + (n-1)r$. Logo

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{r}{2}n^2 + (a_1 - \frac{r}{2})n.$$

Tomando $A = \frac{r}{2}$ e $B = a_1 - \frac{r}{2}$, temos que $S_n = An^2 + Bn$, como queríamos.
Reciprocamente, suponha que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = An^2 + Bn$. Note que $a_n = S_n - S_{n-1}$, para $n > 1$, e $a_1 = S_1$. Assim,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = An^2 + Bn - [A(n-1)^2 + B(n-1)] = (2A)n - A + B = (A + B) + 2A(n-1).$$

Tomando $a_1 = A + B$ e $r = 2A$, temos que (a_n) é uma progressão aritmética de razão $2A$ e primeiro termo $A + B$.