Avaliação 1 - MA12 - 2015.1 - Gabarito

Questão 01 [2,00 pts]

Uma escola pretende formar uma comissão de 6 pessoas para organizar uma festa junina. Sabe-se que há 8 professores e 20 alunos que são candidatos a participar da comissão.

(a) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor.

(b) Calcule o número de comissões distintas que podem ser formadas com pelo menos um professor e dois alunos.

(c) Um aluno resolveu o item (b) acima da seguinte maneira:

"Devemos primeiramente selecionar um professor dentre os oito (C_8^1). Escolhido um professor, devemos, em seguida, escolher dois alunos dentre os vinte (C_{20}^2). Finalmente, escolhidos um professor e dois alunos, devemos escolher 3 pessoas quaisquer das 25 que restaram para formar a comissão de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos (C_{25}^3). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos um professor e dois alunos é igual a $C_8^1 \times C_{20}^2 \times C_{25}^3$."

A solução proposta por este aluno está correta? Caso não esteja, identifique e explique o erro deste aluno.

Solução

(a) As comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor podem ser compostas das seguintes maneiras:

- 1 professor e 5 alunos;
- 2 professores e 4 alunos;
- 3 professores e 3 alunos;
- 4 professores e 2 alunos;
- 5 professores e 1 aluno;
- 6 professores e 0 alunos.

Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor é

$$C_8^1 \times C_{20}^5 + C_8^2 \times C_{20}^4 + C_8^3 \times C_{20}^3 + C_8^4 \times C_{20}^2 + C_8^5 \times C_{20}^1 + C_8^6 \times C_{20}^0 = 337980.$$

Outra solução:
Formam-se todas as comissões possíveis compostas por seis pessoas, isso pode ser feito de C_{28}^6 modos. Agora devemos descontar as comissões formadas somente por alunos (C_{20}^6). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor é $C_{28}^6 - C_{20}^6 = 337980$.

(b) As comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor e dois alunos podem ser compostas das seguintes maneiras:

- 1 professor e 5 alunos;
- 2 professores e 4 alunos;
- 3 professores e 3 alunos;

– 4 professores e 2 alunos;

Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor e dois alunos é

$$C_8^1 \times C_{20}^5 + C_8^2 \times C_{20}^4 + C_8^3 \times C_{20}^3 + C_8^4 \times C_{20}^2 = 336832$$

Outra solução:

Formam-se todas as comissões possíveis compostas por seis pessoas, isso pode ser feito de C_{28}^6 modos. Agora devemos descontar as comissões formadas somente por alunos (C_{20}^6), as comissões formadas por 5 professores e 1 aluno ($C_8^5 \times C_{20}^1$) e as comissões formadas por 6 professores e nenhum aluno ($C_8^6 \times C_{20}^0$). Portanto o número de comissões de seis pessoas com pelo menos 1 professor e dois alunos é $C_{28}^6 - C_{20}^6 - C_8^5 \times C_{20}^1 - C_8^6 \times C_{20}^0 = 336832$.

(c) A solução proposta por este aluno está errada. Considere, por exemplo, uma comissão com 3 professores e 3 alunos, $P_1P_2P_3A_1A_2A_3$. Essa comissão foi contada várias vezes. Uma quando P_1 foi escolhido inicialmente, outra quando P_2 foi escolhido incialmente, etc. Desta forma obtemos uma resposta que inclui comissões repetidas, portanto esta resposta está incorreta.

Questão 02 [2,00 pts]

Uma funcionária solicitou que seu superior fizesse uma carta de referências para um novo trabalho. Ela considera que tem probabilidade igual a 75% de conseguir o emprego se a carta for favorável à contratação e 10% se a carta não for favorável. Ela também estima que a probabilidade de a carta ser favorável é igual a 60%.

(a) Com base nas informações acima, qual a probabilidade de ela ser contratada no emprego pretendido?

(b) Supondo que ela foi contratada, qual a probabilidade de a carta de recomendação ter sido favorável?

(c) E se ela não foi contratada, qual a probabilidade de a carta de recomendação não ter sido favorável?

Solução

Sejam $A = \{\text{funcionária é contratada}\}$ e $B = \{\text{carta é favorável}\}$.

(a) A probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \\ &= P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{49}{100}. \end{aligned}$$

(b) A probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{49}{100}} = \frac{45}{49}. \end{aligned}$$

(c) A probabilidade pedida é

$$\begin{aligned} P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{B} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{P(\bar{A}|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})}{P(\bar{A})} \\ &= \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{51}{100}} = \frac{12}{17}. \end{aligned}$$

Questão 03 [2,00 pts]

Pousados no chão de uma praça quadrada com 70 metros de lado, estão 50 pombos. Mostre que existem dois pombos cuja distância é inferior a 15 metros.

Solução

Vamos dividir o quadrado de 70 metros de lado em 49 quadrados de lado 10 metros. Observe que a maior distância entre dois pontos de um determinado quadrado é igual a $10\sqrt{2}$ metros, que é um valor menor do que 15 metros. Como são 50 pombos, pelo menos dois pombos estarão em um desses quadrados de lado 10 metros, ou seja, a distância entre eles é inferior a 15 metros.

Questão 04 [2,00 pts]

(a) Escrevendo todos os anagramas da palavra PROFMAT e distribuindo-os como se fosse num dicionário (ordem alfabética), teremos como primeira "palavra" AFMOPRT, como segunda AFMOPTR, e assim por diante. Que palavra ocupará a posição 2015 nessa lista?

(b) Considere a palavra HOMOMORFISMO. Quantos anagramas podem ser escritos de modo que duas letras O nunca fiquem juntas?

Solução

(a) Para determinar o anagrama da palavra PROFMAT que ocupará a posição 2015, seguindo a ordem alfabética, devemos contar os anagramas anteriores. Assim os anagramas começados por:

- A são 6!=720 anagramas
- F são 6!=720 anagramas
- MA são 5!=120 anagramas
- MF são 5!=120 anagramas
- MO são 5!=120 anagramas
- MP são 5!=120 anagramas
- MRA são 4!=24 anagramas
- MRF são 4!=24 anagramas
- MRO são 4!=24 anagramas
- MRP são 4!=24 anagramas

Mas $2 \cdot 720 + 4 \cdot 120 + 4 \cdot 24 = 2016$, então o anagrama que ocupa a posição 2016, seguindo a ordem alfabética, é MRPTOFA, já que é o último anagrama dos anagramas iniciados com MRP. Desta forma o anagrama que ocupa a posição 2015 será o imediatamente anterior ao MRPTOFA, que é MRPTOAF.

(b) O número de modos de arrumar as letras diferentes de O é $P_8^{3,1,1,1,1,1}$. Por exemplo, uma dessas arrumações é:

_ H _ F _ M _ I _ M _ S _ M _ R _

Agora temos que colocar as letras O nos espaços assinalados. Como em nenhum espaço podem entrar duas letras O, ocuparemos 4 espaços (uma letra O em cada) e deixaremos 5 espaços vazios. O número de modos de escolher os espaços que ocuparemos é C_9^4. Portanto a resposta é

$$P_8^{3,1,1,1,1,1} \cdot C_9^4 = 846720$$

Outra solução:

Colocamos as letras O (1 modo)

$$\_\ O\ \_\ O\ \_\ O\ \_\ O\ \_$$

Agora devemos decidir quantas letras colocaremos em cada um dos 5 espaços. Devemos escolher x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 ($x_i =$ número de letras que colocaremos no i-ésimo espaço) inteiros não-negativos tais que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$, com $x_2, x_3, x_4 \geqslant 1$ (para impedir que haja duas letras O juntas). Façamos

$$x_2 = 1 + y_2, \quad x_3 = 1 + y_3, \quad x_4 = 1 + y_4, \quad x_1 = y_1, \quad x_5 = y_5$$

e portanto devemos achar o número de soluçoes inteiras não-negativas de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 8$, cuja resposta é $CR_4^5 = C_9^4$. Escolhidas quantas letras irão para cada espaço, por exemplo,

$$\_\ \_\ O\ \_\ \_\ \_\ O\ \_\ O\ \_\ O\ \_$$

temos agora que colocar as letras H,M,M,M,F,I,S,R nessas casas, o que pode ser feito de $P_8^{3,1,1,1,1,1}$ modos. Portanto a resposta é

$$1 \cdot C_9^4 \cdot P_8^{3,1,1,1,1,1} = 846720$$

Questão 05 [2,00 pts]

Sejam x, y e z números reais positivos.

(a) Prove que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$.

(b) Prove que $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

(c) Use o item (b) para mostrar que se a equação $t^3 - at^2 + bt - c = 0$, em que a, b e c são números positivos, possui três raízes reais, então $a^6 \geqslant 27b^3 \geqslant 729c^2$.

Solução

(a) Usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica, segue que

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{y^2+z^2}{2} + \frac{z^2+x^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2y^2} + \sqrt{y^2z^2} + \sqrt{z^2x^2} = xy + yz + zx \ .$$

(b) Usando o item (a) temos que

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geqslant xy + yz + zx + 2xy + 2yz + 2zx = 3xy + 3yz + 3zx \ .$$

Dividindo por 9 vemos que $\dfrac{(x+y+z)^2}{9} \geqslant \dfrac{3xy+3yz+3zx}{9}$.

Extraindo a raiz concluímos que $\dfrac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$.

Agora, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e a geométrica, segue que $\dfrac{xy+yz+zx}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyyzzx} = \sqrt[3]{x^2y^2z^2}$.

Extraindo a raiz quadrada obtemos que $\sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$.

(c) As raízes da equação são todas positivas. De fato, 0 não é solução pois $0^3 - a \cdot 0^2 + b \cdot 0 - c = -c < 0$ e se $t_0 < 0$, então $t_0^3 - at_0^2 + bt_0 - c < 0$.

Sejam x, y e z as soluções da equação. Logo $a = x + y + z, b = xy + yz + zx$ e $c = xyz$.

Pelo item (b) segue que $\frac{a}{3} \geqslant \sqrt{\frac{b}{3}} \geqslant \sqrt[3]{c}$. Elevando essas inequações à sexta potência e depois multiplicando por 729 temos que $a^6 \geqslant 27b^3 \geqslant 729c^2$.