Questão 01 [2,00 pts]

O número inteiro $\binom{1000}{500}$ é divisível por 7? Justifique sua resposta.

Solução

Tem-se que

$$\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{500!500!}$$

$$E_7(1000!) = \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{7^2}\right] + \left[\frac{1000}{7^3}\right] = 142 + 20 + 2 = 164$$

$$E_7(500!) = \left[\frac{500}{7}\right] + \left[\frac{500}{7^2}\right] + \left[\frac{500}{7^3}\right] = 71 + 10 + 1 = 82$$

$E_7\left(\binom{1000}{500}\right) = 164 - 2 \cdot 82 = 0$

Portanto, 7 não divide $\binom{1000}{500}$.

Questão 02 [2,00 pts]

Um número natural é chamado de *número perfeito* se ele é igual à soma de seus divisores naturais distintos dele mesmo. Prove que se $2^p - 1$ é um número primo, então $2^{p-1}(2^p - 1)$ é um número perfeito.

Solução

Suponha que $2^p - 1$ é primo e $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$. Logo $p > 1$ e, consequentemente, n é par.
Como $2^p - 1$ é ímpar, temos que $(2^{p-1}, 2^p - 1) = 1$. Considerando $S(n)$ a soma de seus divisores naturais tem-se que:
$S(n) = S(2^{p-1}(2^p - 1)) = S(2^{p-1})S(2^p - 1) = \dfrac{2^p - 1}{2 - 1}2^p = 2n$ e assim $S(n) - n = n$.
Portanto n é perfeito.

Questão 03 [2,00 pts]

Determine a maior potência de 2 que divide $3^{2008} - 1$.

Solução

O número $3^{2008} - 1$ é par, logo $2 \mid 3^{2008} - 1$.
Observamos que, se r é natural então

$$2^r \mid 3^{2008} - 1 \Longleftrightarrow 3^{2008} \equiv 1 \bmod 2^r$$

Temos que:

$$3 \equiv -1 \bmod 4, \text{ logo } 3^{2008} \equiv 1 \bmod 4.$$

$$3^2 \equiv 1 \bmod 8, \quad \text{logo } 3^{2008} \equiv (3^2)^{1004} \equiv 1 \bmod 8.$$

$$3^8 \equiv (3^4)^2 \equiv (81)^2 \equiv 1 \bmod 16, \quad \text{logo } 3^{2008} \equiv (3^8)^{251} \equiv 1 \bmod 16.$$

$$3^8 \equiv (3^4)^2 \equiv (81)^2 \equiv (17)^2 \equiv 1 \bmod 32, \quad \text{logo } 3^{2008} \equiv (3^8)^{251} \equiv 1 \bmod 32.$$

$$3^8 \equiv (3^4)^2 \equiv (81)^2 \equiv (17)^2 \equiv 33 \bmod 64$$

$$3^{16} \equiv (33)^2 \equiv 1 \bmod 64$$

$$3^{2008} \equiv 3^{16 \cdot 125 + 8} \equiv 3^8 \equiv 33 \bmod 64$$
$$3^{2008} - 1 \equiv 32 \bmod 64$$

Assim, $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ dividem $3^{2008} - 1$ e 2^6 não divide $3^{2008} - 1$. Além disso, qualquer potência maior do que 2^6 não dividirá o número em questão pois, caso contrário acarretaria que 2^6 também dividiria.
Portanto, a maior potência de 2 que divide $3^{2008} - 1$ é 2^5.

Outra solução:
Podemos fatorar $3^{2008} - 1$ da seguinte forma:

$$3^{2008} - 1 = (3^8)^{251} - 1 = (3^8 - 1)(3^{8\cdot 250} + 3^{8\cdot 249} + 3^{8\cdot 248} + \ldots + 3^{8\cdot 1} + 1).$$

Observe que a soma $3^{8\cdot 250} + 3^{8\cdot 249} + 3^{8\cdot 248} + \ldots + 3^{8\cdot 1} + 1$ tem 251 parcelas, todas ímpares: logo, é um número ímpar, não sendo, portanto, divisível por 2. Por outro lado,

$$3^8 - 1 = (3^4 - 1)(3^4 + 1) = 80 \cdot 82 = 2^5 \cdot 5 \cdot 41.$$

Então, a maior potência de 2 que divide $3^8 - 1$ é 2^5.

Questão 04 [2,00 pts ::: (a)=1,00 pt; (b)=1,00 pt]

(a) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Prove, usando indução matemática, que $a + b$ divide $a^{2n+1} + b^{2n+1}$.

(b) Seja n um número natural maior do que 1. Mostre que, se $2^n + 1$ é primo, então $n = 2^m$ para algum número natural m.

Solução
(a) A afirmação é verdadeira para $n = 0$, pois $a + b$ divide $a + b$.

Suponhamos, agora, que $a + b$ divide $a^{2n+1} + b^{2n+1}$, onde $n \geqslant 0$.

Considerando $a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1}$, temos que

$$\begin{aligned}
a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1} &= a^{2n+3} + b^{2n+3} \\
&= a^{2n+1}a^2 + b^{2n+1}b^2 \\
&= a^{2n+1}a^2 + b^{2n+1}b^2 - b^2a^{2n+1} + b^2a^{2n+1} \\
&= a^{2n+1}(a^2 - b^2) + b^2(a^{2n+1} + b^{2n+1}).
\end{aligned}$$

Como $a+b$ divide $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ e, por hipótese, $a+b$ divide

$a^{2n+1} + b^{2n+1}$, segue da igualdade acima que $a+b$ divide $a^{2(n+1)+1} + b^{2(n+1)+1}$,

estabelecendo assim o resultado para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(b) Suponhamos $2^n + 1$ primo, onde $n > 1$.

Considerando a decomposição de n em fatores primos podemos escrever

$n = 2^m \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = 2^m \cdot t$, onde $m \geqslant 0$ e $t = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ é ímpar.

Como t é ímpar, usando o item (a), concluímos que

$2^{2^m} + 1 \mid (2^{2^m})^t + 1 = 2^n + 1$, onde $2^{2^m} + 1 \neq 1$, logo $2^{2^m} + 1 = 2^n + 1$ e

assim $n = 2^m$. Portanto $n = 2^m$ e como $n > 1$, $m \in \mathbb{N}$.

(b) **(solução alternativa)** Suponhamos $2^n + 1$ primo, onde $n > 1$.

Se n tiver um divisor primo p diferente de 2, teremos $n = p \cdot k$ com $k \in \mathbb{N}$.

Como p é ímpar, usando o item (a) , concluímos que $2^k + 1$ divide

$(2^k)^p + 1 = 2^n + 1$, onde $2^k + 1 \neq 1$ ($k \neq 0$) e $2^k + 1 \neq 2^n + 1 (k \neq n)$, o que

dá uma contradição. Portanto, 2 é o único divisor primo de n , isto é, $n = 2^m$

para algum número natural m.

Questão 05 [2,00 pts]

Sejam x, y, m, n inteiros, com $m, n > 0$, e p um número primo. Mostre que, se $x \equiv y \bmod p$ e $m \equiv n \bmod (p-1)$, então $x^m \equiv y^n \bmod p$.

Solução

Suponha $x \equiv y \bmod p$ e $m \equiv n \bmod (p-1)$. Segue que $x^m \equiv y^m \bmod p$ e provaremos que $y^m \equiv y^n \bmod p$.

i) Se $p|y$, então $p|y^m - y^n$, isto é, $y^m \equiv y^n \bmod p$.

ii) Suponha que p não divide y. Por hipótese $m \equiv n \bmod (p-1)$, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = n + k \cdot (p-1)$. Como p não divide y, pelo pequeno teorema de Fermat, $y^{p-1} \equiv 1 \bmod p$ e portanto $y^{k\cdot(p-1)} \equiv 1 \bmod p$.

Segue que, $y^m = y^{n+k\cdot(p-1)} = y^n \cdot y^{k\cdot(p-1)} \equiv y^n \mod p$.

Agora, como $x^m \equiv y^m \mod p$ e $y^m \equiv y^n \mod p$, por transitividade, concluímos que $x^m \equiv y^n \mod p$.