

Questão 01 [2,00 pts ::: (a)=1,00 pt; (b)=1,00 pt]

- (a) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove, usando indução matemática, que $a + b$ divide $a^{2n} - b^{2n}$.
- (b) Usando o procedimento indutivo, encontre $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a^6 - b^6 = q \cdot (a + b)$.

Questão 02 [2,00 pts]

Considere os números $a = 111 \dots 11$ (n dígitos iguais a 1) e $b = 100 \dots 05$ ($n - 1$ dígitos iguais a 0), representados no sistema decimal.

Prove que $ab + 1$ é um quadrado perfeito e determine a sua raiz quadrada.

Questão 03 [2,00 pts]

Temos duas pilhas, A e B, formadas com folhas de papel. Removemos 50 folhas da pilha A para a pilha B, e o número de folhas em B passou a ser o dobro do número das folhas em A. Se, em vez disso, removêssemos certa quantidade de folhas da pilha B para a pilha A, então o número de folhas em A passaria a ser seis vezes o número de folhas em B. Determine a menor possibilidade de folhas em A e calcule o número correspondente de folhas da pilha B.

Questão 04 [2,00 pts ::: (a)=1,00 pt; (b)=1,00 pt]

Sejam a e b dois números inteiros com $(a, b) = 1$.

- (a) Mostre que $(2a + b, a + 2b) = 1$ ou 3.
- (b) Mostre que $(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2.

Questão 05 [2,00 pts ::: (a)=1,00 pt; (b)=1,00 pt]

Mostre que:

- (a) se p é um número primo maior do que 3, então $p^2 + 2$ é um número composto.
- (b) se p é um primo ímpar diferente de 5, então $10 \mid p^2 - 1$ ou $10 \mid p^2 + 1$.