Avaliação 1 - MA14 - 2015 - Gabarito

Questão 01 [**2,00 pts ::: (a)=1,00 pt; (b)=1,00 pt**]

(a) Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove, usando indução matemática, que $a+b$ divide $a^{2n} - b^{2n}$.

(b) Usando o procedimento indutivo, encontre $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a^6 - b^6 = q \cdot (a+b)$.

Solução

(a) A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Suponhamos agora, que $a+b|a^{2n} - b^{2n}$ para $n \geqslant 1$. Note que

$$\begin{aligned} a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)} &= a^2a^{2n} - b^2a^{2n} + b^2a^{2n} - b^2b^{2n} \\ &= (a^2 - b^2)a^{2n} + b^2(a^{2n} - b^{2n}) \end{aligned}$$

Como $a+b|a^2-b^2$ e por hipótese de indução $a+b|a^{2n}-b^{2n}$, decorre da igualdade acima que $a+b|a^{2(n+1)} - b^{2(n+1)}$. Portanto o resultado é verdadeiro para todo natural $n \geqslant 1$.

(b) Apliquemos o processo indutivo para encontrar $q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= a^2a^2 - b^2a^2 + b^2a^2 - b^2b^2 = (a^2-b^2)a^2 + b^2(a^2 - b^2) \\ &= (a+b)(a-b)a^2 + b^2(a-b)(a+b) \\ &= (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^6 - b^6 &= a^2a^4 - b^2a^4 + b^2a^4 - b^2b^4 = (a^2-b^2)a^4 + b^2(a^4 - b^4) \\ &= (a+b)(a-b)a^4 + b^2(a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) \\ &= (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5) \end{aligned}$$

Logo $q = a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$.

Questão 02 [**2,00 pts**]

Considere os números $a = 111\ldots11$ (n dígitos iguais a 1) e $b = 100\ldots05$ ($n-1$ dígitos iguais a 0), representados no sistema decimal.

Prove que $ab + 1$ é um quadrado perfeito e determine a sua raiz quadrada.

Solução

Temos que $a = 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1$ e $b = 10^n + 5$, com $n \geqslant 1$. Usando a fórmula da soma dos elementos de uma progressão geométrica de n termos, com primeiro termo 1 e razão 10 obtemos $a = \dfrac{10^n - 1}{9}$.

Assim segue que

$$\begin{aligned} ab+1 &= \left(\frac{10^n-1}{9}\right)\cdot(10^n+5)+1 \\ &= \frac{10^{2n}+5\cdot 10^n-10^n-5+9}{9} \\ &= \frac{10^{2n}+4\cdot 10^n+4}{9} \\ &= \left(\frac{10^n+2}{3}\right)^2 \end{aligned}$$

Portanto, $\sqrt{ab+1}=\dfrac{10^n+2}{3}$.

Questão 03 [2,00 pts]

Temos duas pilhas, A e B, formadas com folhas de papel. Removemos 50 folhas da pilha A para a pilha B, e o número de folhas em B passou a ser o dobro do número das folhas em A. Se, em vez disso, removêssemos certa quantidade de folhas da pilha B para a pilha A, então o número de folhas em A passaria a ser seis vezes o número de folhas em B. Determine a menor possibilidade de folhas em A e calcule o número correspondente de folhas da pilha B.

Solução

Sejam x a quantidade de folhas na pilha A, y a quantidade de folhas da pilha B e z a quantidade desconhecida de folhas retirada da pilha B.
O seguinte sistema de equações descreve os dados do enunciado:

$$\begin{cases} 2(x-50)=y+50 \\ x+z=6(y-z) \end{cases}$$

Resolvendo a equação diofantina $2(x-50)=y+50$, equivalente a $2x-y=50$, obtemos $x=50+t$ e $y=-50+2t$ com $t\in\mathbb{Z}$. Substituindo os valores de x e y na equação $x+z=6(y-z)$ obtemos $7z=-350+11t$. Como $z\in\mathbb{Z}$ temos que t=7k, com $k\in\mathbb{Z}$.
Daí obtemos $x=50+7k, y=-50+7k$ e $z=-50+11k$.
Como queremos solução inteira positiva temos que $x,y,z>0$, logo $k\geqslant 5$. Portanto, a menor solução positiva ocorre quando $k=5$ obtendo os valores $x=85$, $y=20$ e $z=5$.

Solução Alternativa:
Sejam x a quantidade de folhas na pilha A, y a quantidade de folhas da pilha B e z a quantidade desconhecida de folhas retirada da pilha B.
O seguinte sistema de equações descreve os dados do enunciado:

$$\begin{cases} 2(x-50)=y+50 \\ x+z=6(y-z) \end{cases}$$

Eliminando y, no sistema, obtemos a equação diofantina $11x-7z=900$. Resolvendo a equação diofantina encontramos como resposta $x=1800+7t$ e $z=2700+11t$, e consequentemente $y=3450+14t$, onde $t\in\mathbb{Z}$. Como queremos solução inteira positiva, temos que $0<1800+7t$, $0<3450+14t$ e $0<2700+11t$, logo $t\geqslant -245$. Portanto, a menor solução positiva ocorre quando $t=-245$ obtendo os valores $x=85$, $y=20$ e $z=5$.

Questão 04 [2,00 pts ::: (a)=1,00 pt; (b)=1,00 pt]

Sejam a e b dois números inteiros com $(a, b) = 1$.

(a) Mostre que $(2a + b, a + 2b) = 1$ ou 3.

(b) Mostre que $(a + b, a^2 + b^2) = 1$ ou 2.

Solução

(a) Seja $d = (2a + b, a + 2b)$ o máximo divisor comum. Então $d|(2a + b)$, $d|(2a + 4b)$ e portanto $d|3b$. Mas $(d, b) = 1$. De fato, se $r|d$ e $r|b$, então $r|(a + 2b)$ e $r|2b$, o que acarreta $r|a$, ou seja, $r|(a, b) = 1$. Logo $d|3$ e consequentemente $d = 1$ ou $d = 3$.

(b) Seja $d = (a + b, a^2 + b^2)$ o máximo divisor comum. Então $d|(a + b)^2$ e $d|a^2 + b^2$ e portanto $d|2ab$. Mas $(d, ab) = 1$. De fato, suponha que $r|ab$ e $r|d$. Como $(a, b) = 1$ então $r|a$ ou $r|b$.
Se $r|d$ e $r|a$, então $r|a + b$ e $r|a$, o que acarreta $r|b$, ou seja, $r|(a, b) = 1$.
Se $r|d$ e $r|b$, então $r|a + b$ e $r|b$, o que acarreta $r|a$, ou seja, $r|(a, b) = 1$.
Logo $d|2$ e consequentemente $d = 1$ ou $d = 2$.

Outra solução:

(a) Seja $d = (2a + b, a + 2b)$ o máximo divisor comum.
Segue que $d|(2a + b)$, $d|(a + 2b)$, e daí
$d \mid 2(2a + b) = 4a + 2b$ e $d \mid 2(a + 2b) = 2a + 4b$.
Consequentemente,
$d \mid (4a + 2b) - (a + 2b) = 3a$ e $d \mid (4b + 2a) - (b + 2a) = 3b$.
Como $(a, b) = 1$, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ar + bs = 1$, donde $3ar + 3bs = 3$. Portanto, $d \mid 3$ e assim $d = 1$ ou $d = 3$.

(b) Seja $d = (a + b, a^2 + b^2)$ o máximo divisor comum. Segue que $d|(a + b)^2$ e $d|a^2 + b^2$, e daí $d \mid (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab$.
Além disso, $d \mid 2b(a + b) = 2ab + 2b^2$ e consequentemente,
$d \mid (2ab + 2b^2) - (2ab) = 2b^2$.
Como $(a, b) = 1$, existem $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $ar + bs = 1$,
donde $2abr + 2b^2 s = 2b$ e assim $d \mid 2b$. Por simetria, segue que $d \mid 2a$.
Agora, como $2ar + 2bs = 2$, concluimos que $d \mid 2$. Portanto $d = 1$ ou $d = 2$.

Questão 05 [2,00 pts ::: (a)=1,00 pt; (b)=1,00 pt]

Mostre que:

(a) se p é um número primo maior do que 3, então $p^2 + 2$ é um número composto.

(b) se p é um primo ímpar diferente de 5, então $10 \mid p^2 - 1$ ou $10 \mid p^2 + 1$.

Solução

(a) Como p é um primo maior do que 3, os possíveis restos na divisão euclidiana de p por 3 são 1 ou 2, isto é, $p = 3k + 1$ ou $p = 3k + 2$ com $k \in \mathbb{N}$.

i) $p = 3k + 1 \Rightarrow p^2 + 2 = (3k + 1)^2 + 2 = 9k^2 + 6k + 1 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$

ii) $p = 3k + 2 \Rightarrow p^2 + 2 = (3k + 2)^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 4 + 2 = 3(3k^2 + 4k + 2)$

Em qualquer caso, temos que $p^2 + 2$ é maior do que 3 e divisível por 3, portanto composto.

(b) Se p é um primo ímpar diferente de 5, então os possíveis restos na divisão euclidiana de p por 5 são 1, 2, 3 ou 4, ou seja, $p = 5k_1 + 1$ ou $p = 5k_2 + 2$ ou $p = 5k_3 + 3$ ou $p = 5k_4 + 4$ com $k_1, k_2, k_4 \in \mathbb{Z} - \{0\}$ e $k_3 \in \mathbb{Z}$.

i) $p = 5k_1 + 1 \Rightarrow p^2 = 5n_1 + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = 5n_1$

ii) $p = 5k_2 + 2 \Rightarrow p^2 = 5n_2 + 4 \Rightarrow p^2 + 1 = 5(n_2 + 1)$

iii) $p = 5k_3 + 3 \Rightarrow p^2 = 5n_3 + 9 \Rightarrow p^2 + 1 = 5(n_3 + 2)$

iv) $p = 5k_4 + 4 \Rightarrow p^2 = 5n_4 + 16 \Rightarrow p^2 - 1 = 5(n_4 + 3)$

Em qualquer caso $5|p^2 - 1$ ou $5|p^2 + 1$. Como p é ímpar, então $p^2 + 1$ e $p^2 - 1$ são divisíveis por 2.
Portanto 10 divide $p^2 - 1$ ou divide $p^2 + 1$.