
MA11 – Números e Funções Reais**Avaliação 1****13 de abril de 2013**

1. Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando adequadamente e em detalhes as suas respostas.

- (a) A soma de dois números irracionais é um número irracional. (*pontuação 1,0*)
- (b) O produto de dois números reais com representação decimal infinita e periódica é um número real que não possui representação decimal finita. (*pontuação 1,0*)

2. Da mesma forma que se expressa um número real no sistema de numeração decimal, é possível expressá-lo em um sistema de numeração posicional qualquer, de base $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 2$. Dizemos que um número $a \in \mathbb{R}$ está expresso no sistema de base β se ele é escrito na forma:

$$a = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \beta^{-n}$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e os a_n são dígitos entre 0 e $\beta - 1$.

- (a) Sejam x e y os números reais cujas representações no sistema de numeração de base 4 são dadas por $0,321$ e $0,111\dots$, respectivamente. Determine as representações de x e de y no sistema decimal. (*pontuação 1,0*)
 - (b) Mostre que um número racional $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{R}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$, possui representação finita no sistema de numeração posicional de base β se, e somente se, o denominador n não possui fatores primos que não sejam fatores de β . (*pontuação 1,0*)
3. (a) Considere a função $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2x}$. Usando o fato de que a função $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \sqrt{x}$ é monótona crescente, mostre que h é monótona crescente. (*pontuação 0,5*)
- (b) Conclua, com base no item anterior, que, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ a equação $\sqrt{x} = a - \sqrt{2x}$ admite uma única solução real. (*pontuação 0,5*)
- (c) Considere a seguinte resolução para a equação $\sqrt{x} = 1 - \sqrt{2x}$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} = 1 - \sqrt{2x} &\Rightarrow x = 1 - 2\sqrt{2x} + 2x \Rightarrow 1 + x = 2\sqrt{2x} \Rightarrow \\ 1 + 2x + x^2 = 8x &\Rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Este método de resolução está correto? Justifique sua resposta. (*pontuação 1,0*)

4. Considere a função $p : [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{cases} 3x - x^2 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ ||x - 2| - 1| & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

- (a) Faça um esboço do gráfico de p . (*pontuação 0,5*)
- (b) Determine todas as soluções reais da equação $p(x) = 2$. (*pontuação 0,5*)
- (c) Determine todos os pontos de máximo e de mínimo locais e absolutos de p . (*pontuação 0,5*)
- (d) Faça um esboço do gráfico da função $q : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$q(x) = p(2x + 1) - 2.$$

(*pontuação 0,5*)

5. Considere a função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Use a forma canônica do trinômio de segundo grau

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

para mostrar que:

- (a) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo absoluto de f ; (*pontuação 1,0*)
- (b) a reta $x = x_0$ é um eixo de simetria vertical do gráfico de f . (*pontuação 1,0*)

