Questão 1 [2,0 pt]

Prove, por indução sobre n, que $5^n + 2 \cdot 11^n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solução

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois 3 divide $5^1 + 2.11^1 = 27$. Admitindo $5^n + 2 \cdot 11^n$ divisível por 3 (hipótese da indução), provaremos que $5^{n+1} + 2 \cdot 11^{n+1}$ também é divisível por 3. Escrevemos

$$5^{n+1} + 2 \cdot 11^{n+1} = 5^n \cdot 5 + 2 \cdot 11^n(5 + 6) = 5 \cdot (5^n + 2 \cdot 11^n) + 12 \cdot 11^n.$$

Como 3 divide $5^n + 2 \cdot 11^n$ e 3 divide 12 , concluimos que 3 divide $5 \cdot (5^n + 2 \cdot 11^n) + 12 \cdot 11^n$. Portanto, $5^n + 2 \cdot 11^n$ é divisível por 3, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Questão 2 [2,0 pt]

Perguntado sobre quantos alunos tinha naquele ano, o professor escreveu no quadro:

"733 alunos, dos quais 276 são meninos e 435 são meninas".

Inicialmente a resposta pareceu estranha, mas logo notamos que o professor não empregou o sistema decimal. Qual foi o sistema utilizado pelo professor?

Solução

No sistema de base b, temos que

$$733 = 276 + 435.$$

Assim, $7 \cdot b^2 + 3 \cdot b + 3 = (2 \cdot b^2 + 7 \cdot b + 6) + (4 \cdot b^2 + 3 \cdot b + 5)$, donde $b^2 - 7b - 8 = 0$. Agora, determinando as raízes da equação, obtemos $b = -1$ ou $b = 8$. Portanto, a base utilizada foi $b = 8$.

Questão 3 [2,0 pt]

Mostre que $4k+3$ e $5k+4$ são primos entre si, para todo inteiro k.

Solução

Suponha $d = (4k+3, 5k+4)$. Segue que $d \mid 4k+3$ e $d \mid 5k+4$. Agora, usando o fato : se $d \mid a$ e $d \mid b$, então $d \mid am + bn$, quaisquer que sejam os inteiros m e n; concluimos que $d \mid 4(5k+4) - 5(4k+3) = 1$. Segue que $d = 1$ portanto, $4k+3$ e $5k+4$ são primos entre si.

Outra solução

Usaremos o seguinte fato: $(b, a) = (a, b) = (a, b+ma) = (b+ma, a)$, quaisquer que sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$. Escrevendo $5k+4 = k+1+4k+3$ temos

$$(4k+3, 5k+4) = (4k+3, k+1+4k+3) = (4k+3, k+1).$$

Analogamente,

$$(4k+3, k+1) = (k+3(k+1), k+1) = (k, k+1) = (k, 1+k) = (k, 1) = 1.$$

Portanto, $4k+3$ e $5k+4$ são primos entre si.

Questão 4 [2,0 pt]

(a) Considere a sequência: $1, 11, 111, 1111, ..., 1111...11$; com 2015 números naturais. Mostre que pelo menos dois números, dessa sequência, deixam o mesmo resto quando divididos por 2014.

(b) Utilizando o item (a), prove que existe um múltiplo de 2014 formado apenas com os dígitos (algarismos) 0 e 1.

Solução

(a) Considerando os restos das divisões de cada número da sequência dada pelo número 2014 teremos um total de 2015 restos. Como o número de possibilidades para o resto da divisão de um número por 2014 é 2014, concluimos que pelo menos dois desses restos serão iguais.

(b) Usando o item (a), considere dois números da sequência $1, 11, 111, 1111, ..., 1111...11$ que deixam mesmo resto quando divididos por 2014,

$$\underbrace{11\ldots1}_{r \text{ números } 1} = 2014q_1 + r \qquad \text{e} \qquad \underbrace{11\ldots1}_{s \text{ números } 1} = 2014q_2 + r,$$

onde $1 \le s \le r \le 2015$. Donde, $\underbrace{11\ldots1}_{r} - \underbrace{11\ldots1}_{s} = \underbrace{11\ldots\underbrace{00\ldots0}_{s}}_{r} = 2014(q_1 - q_2)$ Portanto, obtemos um múltiplo de 2014 formado apenas com os dígitos(algarismos) 0 e 1.

Questão 5 [2,0 pt]

Determine duas frações positivas que tenham 17 e 23 como denominadores e cuja soma seja igual a $\dfrac{234}{391}$.

Solução

Indicando as duas frações por $\dfrac{a}{17}$ e $\dfrac{b}{23}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, temos que $\dfrac{a}{17} + \dfrac{b}{23} = \dfrac{234}{391}$. Daí, $\dfrac{23a + 17b}{391} = \dfrac{234}{391}$, obtendo a equação diofantina

$$23a + 17b = 234.$$

Para determinarmos os valores de a e b, resolveremos a equação diofantina. Aplicando o algoritmo de Euclides, obtemos

$$\begin{aligned}
&23 \cdot (3) + 17 \cdot (-4) = 1 \Rightarrow 23 \cdot (3 \cdot 234) + 17 \cdot (-4 \cdot 234) = 234 \Rightarrow \\
&23 \cdot (702) + 17 \cdot (-936) = 234 \Rightarrow 23 \cdot (17 \cdot 41 + 5) + 17 \cdot (-936) = 234 \Rightarrow \\
&23 \cdot (5) + 17 \cdot (-936 + 23 \cdot 41) = 234 \Rightarrow 23 \cdot (5) + 17 \cdot (-936 + 943) = 234 \Rightarrow \\
&23 \cdot (5) + 17 \cdot (7) = 234.
\end{aligned}$$

Logo, $a = 5$ e $b = 7$ é a solução minimal da equação. Escrevendo a solução geral, onde $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} a = 5 + 17t \\ b = 7 - 23t, \end{cases}$$

concluímos que $a = 5$ e $b = 7$ formam a única solução, em $\mathbb{N}$, da equação $23a + 17b = 234$. Portanto, as duas frações positivas são $\dfrac{5}{17}$ e $\dfrac{7}{23}$.