Questão 1 **[2,0 pt]**

Calcule a velocidade média em cada uma das situações abaixo:

(a) Um carro percorre metade de uma certa distância a uma velocidade de 100 km/h e a outra metade da distância a 60 km/h.

(b) Um carro percorre uma estrada por um certo tempo t a uma velocidade de 100 km/h e depois durante o mesmo tempo t a uma velocidade de 60 km/h.

Solução

Velocidade média é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto para percorrê-la.

(a) Consideremos d a distância total do percurso. Na primeira metade do percurso o carro percorreu a distância $\frac{d}{2}$ com velocidade de 100 km/h. O tempo t_1 gasto foi, em horas

$$100 = \frac{\frac{d}{2}}{t_1} \Rightarrow 100t_1 = \frac{d}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{d}{200}.$$

Analogamente, na segunda metade do percurso o tempo t_2 gasto foi, em horas

$$60 = \frac{\frac{d}{2}}{t_2} \Rightarrow 60t_2 = \frac{d}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{d}{120}.$$

O tempo total $t = t_1 + t_2$, gasto no percurso, foi, em horas

$$t = t_1 + t_2 = \frac{d}{200} + \frac{d}{120} = \frac{8d}{600} = \frac{d}{75}.$$

Desse modo, a velocidade média para o percurso total foi, em km/h

$$V_m = \frac{d}{\frac{d}{75}} = 75$$

(b) No primeiro trecho, a distância d_1 percorrida foi, em quilômetros

$$100 = \frac{d_1}{t} \Rightarrow d_1 = 100t.$$

No segundo trecho, a distância d_2 percorrida foi, em quilômetros

$$60 = \frac{d_2}{t} \Rightarrow d_2 = 60t.$$

Assim, a distância total percorrida foi, em quilômetros, $d = d_1 + d_2 = 100t + 60t = 160t$, e o tempo total do percurso, em horas, foi $2t$. Desse modo, a velocidade para o percurso total foi, em km/h

$$V_m = \frac{160t}{2t} = 80.$$

Questão 2 **[2,0 pt]**

Encontre o valor do número natural n que satisfaz a igualdade abaixo:

$$\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 4 + \log_{\sqrt{2}} 8 + \cdots + \log_{\sqrt{2}} 2^n = 110\ .$$

Solução

Reescrevendo a soma proposta, temos:

$$\log_{\sqrt{2}}\ 2^1 + \log_{\sqrt{2}}\ 2^2 + \log_{\sqrt{2}}\ 2^3 + \cdots + \log_{\sqrt{2}}\ 2^n = 110\ .$$

Calculemos inicialmente, de modo genérico, $\log_{\sqrt{2}}\ 2^n$

$$\log_{\sqrt{2}}\ 2^n = k \quad \Rightarrow \quad \log_{2^{\frac{1}{2}}}\ 2^n = k \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{k}{2}} = 2^n \quad \Rightarrow \quad k = 2n.$$

A soma proposta inicialmente passa a ser representada por:

$$2 \quad + \quad 4 \quad + \quad 6 \quad + \quad \cdots + \quad 2n \quad = \quad 110.$$

Trata-se, pois, da soma de n termos em progressão aritmética de razão $r = 2$, cujo primeiro termo é $a_1 = 2$ e o n-ésimo termo é $a_n = 2n$.

Pelo cálculo da soma de n termos em progressão aritmética, temos:

$$S_n = (a_1 + a_n).\frac{n}{2} \Rightarrow 110 = (2 + 2n).\frac{n}{2} \Rightarrow 110 = (n + 1).n \Rightarrow n^2 + n - 110 = 0.$$

Resolvendo a equação, obtemos como resultados $n = 10$ e $n = -11$ (que não convém pois $-11 \notin \mathbb{N}$). Portanto, a soma é satisfeita para $n = 10$.

De fato, pela complementação dos termos da progressão aritmética, pode-se facilmente chegar à soma:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 110.$$

Questão 3 **[2,0 pt]**

De um grupo de 12 mulheres, sendo Paula uma delas, e de 10 homens, sendo Felipe um deles, quantas comissões podem ser formadas com:

(a) 4 mulheres e 3 homens?

(b) 5 pessoas, sendo pelo menos 3 mulheres?

(c) 6 pessoas, sendo 3 de cada sexo e de modo que Paula e Felipe façam parte?

Solução

(a) Para formarmos a comissão devemos escolher 4 mulheres, dentre as 12, e 3 homens, dentre os 10. Há, portanto $C_{12}^4 \times C_{10}^3 = 495 \times 120 = 59400$ comissões.

(b) Para formarmos comissões de 5 pessoas, sendo pelo menos 3 mulheres, devemos considerar que há comissões com:

- *3 mulheres e 2 homens:* $C_{12}^3 \times C_{10}^2 = 220 \times 45 = 9900$,
- *4 mulheres e 1 homem:* $C_{12}^4 \times C_{10}^1 = 495 \times 10 = 4950$,
- *5 mulheres* $C_{12}^5 = 792$.

Desse modo, há 15642 comissões de 5 pessoas, sendo pelo menos 3 mulheres.

(c) Como Paula já está definida como membro da comissão feminina, caberá a escolha dos outros dois membros, dentre as 11 mulheres restantes. Do mesmo modo, Felipe já está definido como membro da comissão masculina, cabendo a escolha dos outros dois membros, dentre os 9 homens restantes.

Há, portanto, $C_{11}^2 \times C_9^2 = 55 \times 36 = 1980$ comissões de 6 pessoas, sendo 3 de cada sexo e de modo que Paula e Felipe façam parte.

Questão 4 **[2,0 pt]**

(a) Mostre que todo número natural n tem um múltiplo que se escreve apenas com os algarismos 0 e 3.

(b) Mostre que se n é relativamente primo com 10, então n tem um múltiplo com todos os algarismos iguais a 3.

Solução

Seja n um número natural.

(a) Considere os $n+1$ primeiros números da sequência $3, 33, 333, 3333, \ldots$. Divida-os por n e considere os restos dessas divisões. Esses restos só podem ser iguais a $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Pensando nos $n+1$ como objetos e nos n possíveis restos como gavetas, temos mais objetos do que gavetas. O Princípio das Gavetas assegura que alguma gaveta receberá mais de um objeto, isto é, há dois números da lista que dão o mesmo resto quando divididos por n, digamos $33\ldots3$ (p algarismos) e $33\ldots,3$ (q algarismos), com $p<q$. A diferença desses números é um múltiplo de n e se escreve $33\ldots30\ldots0$, com p algarismos iguais 0 e $q-p$ algarismos 1.

(b) Agora vamos supor que n é relativamente primo com 10. Pelo item (a) sabemos que n possui um múltiplo da forma $33\ldots30\ldots0 = 33\ldots3\cdot 10^p$. Como $\mathrm{mdc}(n,10)=1$, segue o resultado.

Questão 5 **[2,0 pt]**

Duas máquinas A e B produzem 5000 peças por dia. A máquina A produz 3000 peças, das quais 2% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas.

(a) Se uma peça for escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ser defeituosa?

(b) Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A?

Solução

(a) A máquina A produz diariamente 3000 peças, dentre as quais 60 são defeituosas.

A máquina B produz diariamente 2000 peças, dentre as quais 20 são defeituosas.

Das 5000 peças produzidas diariamente, 80 são defeituosas. A probabilidade P(A) de uma peça escolhida ao acaso ser defeituosa será

$$P(A) = \frac{80}{5000} = 0,016 = 1,6\%$$

(b) Sabe-se que a peça escolhida é defeituosa, portanto ela é uma das 80 peças defeituosas produzidas no dia. A probabilidade P(B) de que essa peça defeituosa tenha sido produzida pela máquina A será

$$P(B) = \frac{60}{80} = 0,75 = 75\%$$