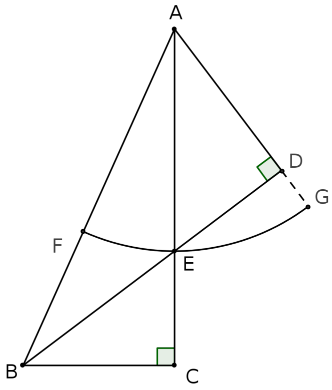
Questão 1 [2,0 pt]

Na figura a seguir temos que $\angle BAC = x/2$, $\angle BAD = y/2$, medidos em radianos, e $\overline{AB} = 2$.



Com base nessas informações:

(a) Expresse a área dos triângulos ABC e ABD como funções de x e y.

(b) Mostre que

$$\frac{\text{Área }(ABD)}{\text{Área }(ABC)} < 1 + \frac{\text{Área }(AED)}{\text{Área }(ABE)}.$$

(c) Mostre que para $0 < x < y < \pi/2$ vale

$$\frac{\sin(x)}{x} > \frac{\sin(y)}{y}.$$

Solução

(a) Como $\overline{AB} = 2$, considerando o triângulo ABC, retângulo em C, temos

$$\frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \text{sen}\,(\angle BAC) = \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right),$$

logo

$$\overline{BC} = 2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Da mesma forma,

$$\frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \cos\,(\angle BAC) = \cos\left(\frac{x}{2}\right),$$

logo

$$\overline{AC} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Assim,

$$\text{Área}(ABC) = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{2} = \frac{2\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2} = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \text{sen}(x).$$

Considerando agora o triângulo ABD, retângulo em D, e ainda utilizando que $\overline{AB} = 2$, temos

$$\frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \operatorname{sen}(\angle BAD) = \operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right),$$

logo

$$\overline{BD} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right),$$

e

$$\frac{\overline{AD}}{2} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \cos(\angle BAD) = \cos\left(\frac{y}{2}\right),$$

que implica

$$\overline{AD} = 2\cos\left(\frac{y}{2}\right).$$

Então,

$$\text{Área}(ABD) = \frac{\overline{BD}\cdot\overline{AD}}{2} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cdot 2\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{2} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{y}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) = \operatorname{sen}(y).$$

(b) Observe que

$$\text{Área}(ABD) = \text{Área}(ABE) + \text{Área}(AED)$$

e

$$\text{Área}(ABC) = \text{Área}(ABE) + \text{Área}(BCE) > \text{Área}(ABE).$$

Assim,

$$\frac{\text{Área}(ABD)}{\text{Área}(ABC)} < \frac{\text{Área}(ABE) + \text{Área}(AED)}{\text{Área}(ABE)} = 1 + \frac{\text{Área}(AED)}{\text{Área}(ABE)}.$$

(c) Pelos itens anteriores, temos

$$\frac{\operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\text{Área}(ABD)}{\text{Área}(ABC)} < 1 + \frac{\text{Área}(AED)}{\text{Área}(ABE)}.$$

O setor circular de centro A e determinado pelo arco $\overset{\frown}{FE}$ está contido no triângulo ABE. Como a medida de $\overset{\frown}{FE}$ em radianos é $x/2$, temos

$$\text{Área}(ABE) > \frac{rx}{2},$$

onde r é o raio do círculo.

O setor circular de centro A e determinado pelo arco $\overset{\frown}{EG}$ contém o triângulo AED. Como a medida de $\overset{\frown}{EG}$ em radianos é $y/2 - x/2 = (y-x)/2$, temos

$$\text{Área}(AED) < \frac{r(y-x)}{2}.$$

Assim,

$$\frac{\operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(x)} < 1 + \frac{\text{Área}(AED)}{\text{Área}(ABE)} < 1 + \frac{\frac{r(y-x)}{2}}{\frac{rx}{2}} = 1 + \frac{y-x}{x} = 1 + \frac{y}{x} - 1 = \frac{y}{x},$$

portanto

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} > \frac{\operatorname{sen}(y)}{y}.$$

Questão 2 [2,0 pt]

Considere três retas r, s e t do espaço tais que qualquer plano seja concorrente a pelo menos uma destas retas. Considere ainda um poliedro tal que

- todas as suas faces são quadriláteros;

- cada uma de suas arestas é paralela a alguma das retas r, s ou t; e

Prove que todas as faces deste poliedro são paralelogramos.

Solução

Considere uma das faces do poliedro, a qual chamaremos de $ABCD$. Sem perda de generalidade, digamos que $AB \parallel r$. Não poderemos ter $BC \parallel r$, pois, neste caso, teremos AB e BC consecutivos e colineares. Digamos então, sem perda de generalidade, que $BC \parallel s$.

Observe que já concluímos que cada uma das retas r e s é paralela ou está contida no plano da face $ABCD$. Assim, pela informação dada sobre as retas, t deve ser concorrente a tal plano, logo não pode ser paralela a este plano nem pode estar contida nele. Portanto, nenhuma das arestas CD e AD desta face pode ser paralela à reta t.

Não poderemos ter $CD \parallel s$ (pois, nesse caso, BC e CD seriam colineares) nem, como já vimos, $CD \parallel t$. Portanto, $CD \parallel r$. Da mesma forma, AD não pode ser paralela a r, logo $AD \parallel s$.

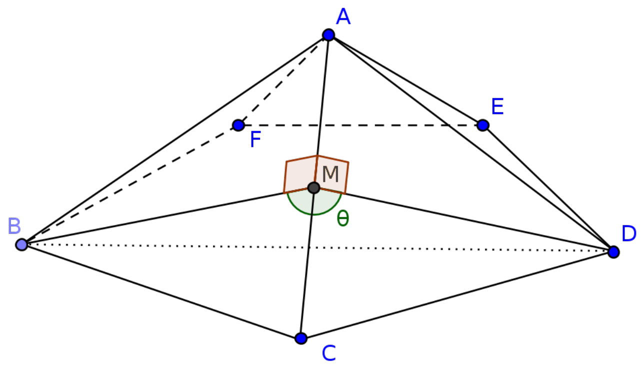
Até aqui, já vimos que $ABCD$ é um paralelogramo. Mas a mesma argumentação vale para qualquer uma das faces do poliedro, portanto todas as suas faces são paralelogramos.

Questão 3 [2,0 pt]

Sabendo que a diagonal de um pentágono regular mede $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de seu lado, determine o cosseno do ângulo entre duas faces adjacentes de um icosaedro regular.

Solução

A partir de um vértice A do icosaedro, podemos retirar uma pirâmide de base $BCDEF$ pentagonal regular, cujas faces laterais são cinco triângulos equiláteros que são faces do icosaedro. Se tomarmos o ponto médio M de AC, o ângulo entre as faces ABC e ACD será dado por $\angle BMD$.



Denotando por l a medida da aresta do icosaedro, como BM e DM são alturas de triângulos equiláteros de lado l, teremos

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

Como BD é uma diagonal do pentágono regular $BCDEF$, de lado l, temos

$$\overline{BD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}l.$$

Assim, pela lei dos cossenos, fazendo $\angle BMD = \theta$, temos

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}l\right)^2 = \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\cos\,\theta,$$

logo

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos\theta$$

e então

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Assim, o ângulo entre as faces é

$$\theta = \arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right).$$

Questão 4 [2,0 pt] Questão anulada

Um poliedro convexo tem exatamente 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais. Obtenha:

(a) O número total de vértices, faces e arestas do poliedro.

(b) O número de diagonais do poliedro

(c) A soma dos ângulos internos de todas as faces.

Solução

A questão está anulada. O poliedro descrito no enunciado não existe; vejamos o motivo.

Somando o número de faces de cada tipo, o poliedro terá $3+1+1+2=7$ faces. Multiplicando o número de arestas em cada tipo de face pelo número de faces de cada tipo, e somando os resultados obtidos, estaremos "contando" duas vezes cada aresta, assim,

$$2A = 3\cdot 3 + 1\cdot 4 + 1\cdot 5 + 2\cdot 6 = 9+4+5+12 = 30,$$

logo $A = 15$. Como

$$V - A + F = 2,$$

temos

$$V - 15 + 7 = 2, \text{logo } V = 10.$$

Por outro lado (veja Problema 2.5 do Capítulo 9),

$$30 = 2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ...,$$

onde V_i é o número de vértices nos quais incidem i arestas.
Assim,

$$30 = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... \geq 3V_3 + 3V_4 + 3V_5 + ... =$$

$$= 3(V_3 + V_4 + V_5 + ...) = 3V = 30.$$

Com isso, a desigualdade é, na verdade, uma igualdade, e, portanto,

$$3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + ... = 3V_3 + 3V_4 + 3V_5,$$

o que só é possível se $V_4 = V_5 = ... = 0$, logo $V_3 = V = 10$. Assim, o poliedro possui apenas vértices nos quais incidem 3 arestas.

De posse dessa informação, vamos tentar construir o poliedro.

Se as duas faces hexagonais não tiverem vértice comum (figura 1), o poliedro deverá ter pelo menos 12 vértices. Mas isto contraria $V = 10$.

Se as duas faces hexagonais tiverem apenas um vértice comum (figura 2), o poliedro deverá ter pelo menos 11 vértices, contrariando também $V = 10$.

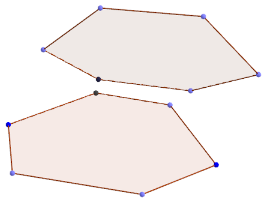


Figura 1

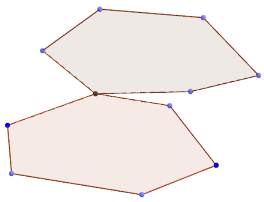


Figura 2

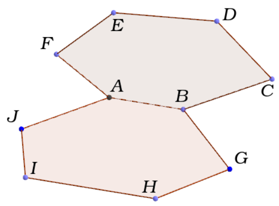


Figura 3

Assim, como duas faces não podem ter três ou mais dois vértices em comum, as faces hexagonais terão exatamente dois vértices em comum (figura 3). Note que os vértices destas duas faces já são todos os 10 vértices que o poliedro pode ter.

No vértice A acima não pode incidir nenhuma outra aresta (pois nele já incidem as 3 arestas possíveis). Portanto, devemos ter A, F e J em uma mesma face. Por outro lado, esta face não pode ter nenhum dos outros pontos como vértice, pois, nesse caso, ela teria três vértices em comum com alguma das faces hexagonais. Assim, AFJ será uma face (Figura 4).

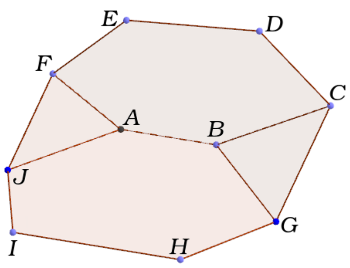


Figura 4

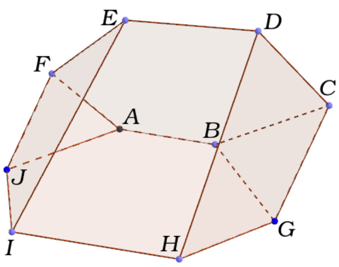


Figura 5

Da mesma forma, BCG também é uma face (Figura 4).

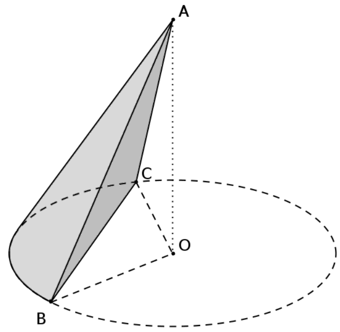
Repare que F, J, C e G já "esgotaram" as arestas que neles incidem.

O segmento FJ é aresta de alguma face, mas como não é possível incidir mais alguma aresta em F e J, esta face deverá ter como vértices os pontos E, F J e I. Veja que esta face já tem dois vértices em comum com cada uma das duas faces hexagonais, logo não poderá ter nenhum outro vértice. Assim, tal face é $EFJI$, logo uma face quadrangular (Figura 5).

Da mesma forma, devemos ter obrigatoriamente a face $DCGH$ (Figura 5), o que é um absurdo pois, pelo enunciado, não podemos ter mais de uma face quadrangular.

Questão 5 [2,0 pt]

O sólido da figura é limitado pelo triângulo ABC, pela lateral de um cone de vértice A e por um segmento



circular de centro O. Sabe-se que O é a projeção ortogonal de A sobre o plano que contém o círculo representado, que o ângulo $B\hat{O}C$ é reto e que $\overline{OA} = 6$cm e $\overline{OB} = 3$cm. Determine o volume do sólido.

Solução

Como o ângulo $B\hat{O}C$ é reto, o sólido em questão é obtido retirando-se a pirâmide de base BOC e vértice A de um quarto do cone circular reto, cuja base é o círculo e cujo vértice é A. O volume do quarto de cone será dado, em unidades de volume, por

$$V_c = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi \cdot \overline{OB}^2 \cdot \overline{OA}}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 6}{3} = \frac{9\pi}{2}.$$

O volume da pirâmide cuja base é o triângulo retângulo BOC e cuja altura é OA é dado, em unidades de volume, por

$$V_p = \frac{\frac{\overline{BO} \cdot \overline{CO}}{2} \cdot \overline{OA}}{3} = \frac{\frac{9}{2} \cdot 6}{3} = 9.$$

Assim, o volume procurado é, em unidades de volume,

$$V = V_c - V_p = \frac{9\pi}{2} - 9 = 9\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$