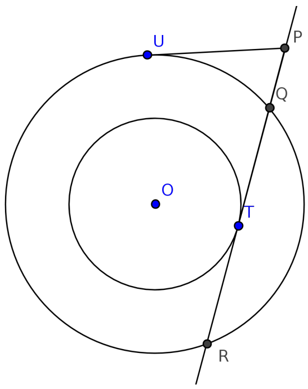
Questão 1 [2,0 pt]

Sejam PT e PU segmentos tangentes a duas circunferências concêntricas, com T pertencente à menor e U à maior. Se o segmento PT corta a circunferência maior no ponto Q, mostre que

$$\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{QT}^2.$$

Solução

Prolongue QT na direção de T até o ponto R da circunferência maior. Sendo O o centro de ambos os círculos, como o raio OT é perpendicular a QR, temos que $\overline{QT} = \overline{TR}$ A potência de P em relação ao círculo maior é dada tanto



por $\overline{PU}^2$ quanto por $\overline{PQ} \cdot \overline{PR}$, logo

$$\overline{PU}^2 = \overline{PQ} \cdot \overline{PR}.$$

Mas $\overline{PQ} = \overline{PT} - \overline{QT}$ e $\overline{PR} = \overline{PT} + \overline{TR} = \overline{PT} + \overline{QT}$. Assim,

$$\overline{PU}^2 = \overline{PQ} \cdot \overline{PR} = \left(\overline{PT} - \overline{QT}\right)\left(\overline{PT} + \overline{QT}\right) = \overline{PT}^2 - \overline{QT}^2.$$

Portanto,

$$\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{QT}^2.$$

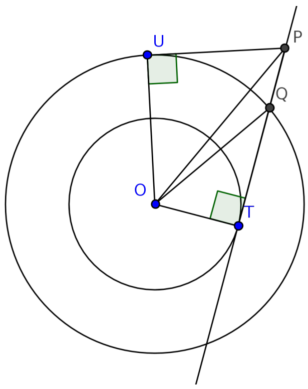
Solução alternativa

Como PT e PU são tangentes às circunferências, serão retos os ângulos $P\hat{T}O$ e $P\hat{U}O$. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos QTO, PTO e PUO, temos

$$\overline{QO}^2 = \overline{TO}^2 + \overline{QT}^2, \tag{1}$$

$$\overline{PO}^2 = \overline{TO}^2 + \overline{PT}^2, \tag{2}$$

$$\overline{PO}^2 = \overline{UO}^2 + \overline{PU}^2. \tag{3}$$



Reescrevendo (1), temos

$$\overline{TO}^2 = \overline{QO}^2 - \overline{QT}^2. \tag{4}$$

Por (2) e (3), temos

$$\overline{TO}^2 + \overline{PT}^2 = \overline{UO}^2 + \overline{PU}^2,$$

logo, substituindo a expressão para $\overline{TO}$ obtida em (4), obtemos

$$\overline{QO}^2 - \overline{QT}^2 + \overline{PT}^2 = \overline{UO}^2 + \overline{PU}^2.$$

Como UO e QO são raios de uma mesma circunferencia, e, portanto, $\overline{UO} = \overline{QO}$, a expressão acima nos dá

$$-\overline{QT}^2 + \overline{PT}^2 = \overline{PU}^2,$$

que, reescrevendo, fica

$$\overline{PT}^2 - \overline{PU}^2 = \overline{QT}^2.$$

Questão 2 [2,0 pt]

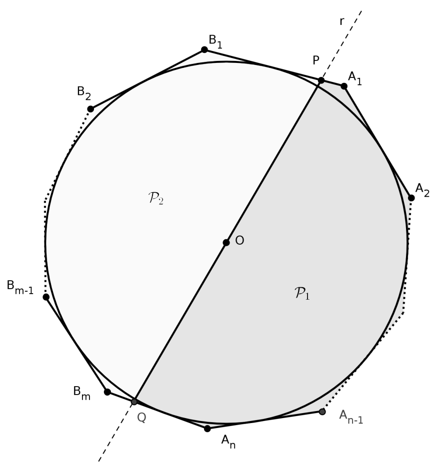
Considere um polígono $\mathcal{P}$ circunscrito a um círculo $\mathcal{C}$. Se uma reta r passa pelo centro de $\mathcal{C}$ e divide $\mathcal{P}$ em dois polígonos, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, prove que $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ têm mesma área se, e somente se, têm o mesmo perímetro.

Solução

Sejam P e Q os pontos onde a reta r intersecta o polígono e denote por

- $P, A_1, \ldots, A_n, Q$ os vértices do polígono $\mathcal{P}_1$ e
- $P, B_1, \ldots, B_m, Q$ os vértices do polígono $\mathcal{P}_2$,

como na figura abaixo.



Denotemos ainda

- $l_1 = \overline{PA_1}$, $l_2 = \overline{A_1A_2}$, ..., $l_n = \overline{A_{n-1}A_n}$ e $l_{n+1} = \overline{A_nQ}$ e
- $l'_1 = \overline{PB_1}$, $l'_2 = \overline{B_1B_2}$, ..., $l'_m = \overline{B_{m-1}B_m}$ e $l'_{m+1} = \overline{B_mQ}$.

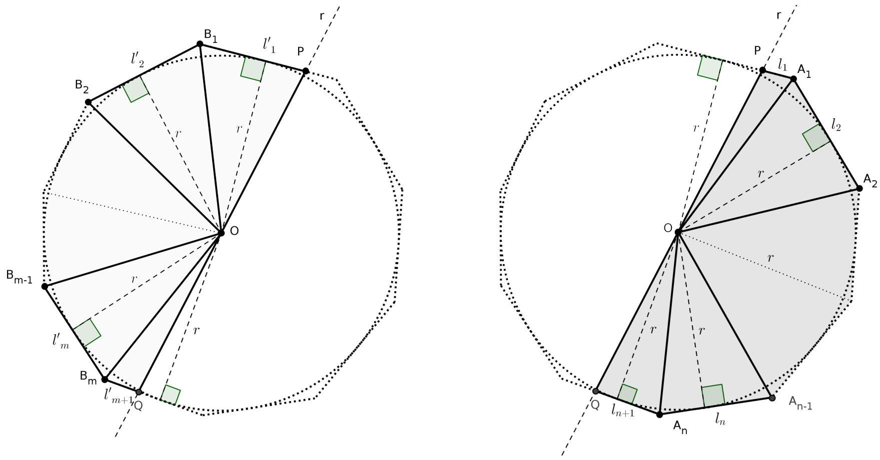
Observe que o perímetro de $\mathcal{P}_1$ é dado por

$$2P_1 = l_1 + l_2 + \ldots + l_n + l_{n+1} + \overline{PQ},$$

e o de $\mathcal{P}_2$ é dado por

$$2P_2 = l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_m + l'_{m+1} + \overline{PQ}.$$

Decompondo o polígono $\mathcal{P}_1$ em $n+1$ triângulos de altura dada pelo raio r do círculo, que tenham o centro O do círculo como um dos vértices (figura), a área de $\mathcal{P}_1$ é dada por



$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{P}_1) &= \frac{l_1 \cdot r}{2} + \frac{l_2 \cdot r}{2} + \ldots + \frac{l_n \cdot r}{2} + \frac{l_{n+1} \cdot r}{2} \\
&= \frac{(l_1 + l_2 + \ldots + l_{n-1} + l_n)r}{2} \\
&= \frac{(2P_1 - \overline{PQ})r}{2}.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, decompondo o polígono $\mathcal{P}_2$ em $m+1$ triângulos, temos

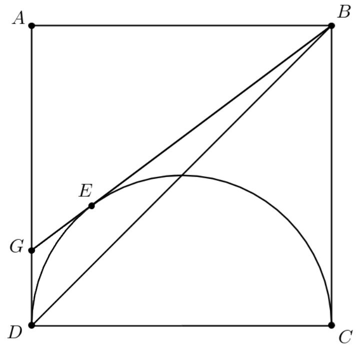
$$\begin{aligned}
\text{Área}(\mathcal{P}_2) &= \frac{l'_1 \cdot r}{2} + \frac{l'_2 \cdot r}{2} + \ldots + \frac{l'_m \cdot r}{2} + \frac{l'_{m+1} \cdot r}{2} \\
&= \frac{(l'_1 + l'_2 + \ldots + l'_{m-1} + l'_m)r}{2} \\
&= \frac{(2P_2 - \overline{PQ})r}{2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Área}(\mathcal{P}_1) = \text{Área}(\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow \frac{(2P_1 - \overline{PQ})r}{2} = \frac{(2P_2 - \overline{PQ})r}{2} \Leftrightarrow 2P_1 = 2P_2.$$

Questão 3 [2,0 pt]

Sejam $ABCD$ um quadrado de lado L, a semicircunferência de diâmetro CD, o segmento BG tangente à semicircunferência em E, conforme a figura abaixo. Calcule, em função de L, a medida do segmento DG.



Solução

Seja F o centro da semicircunferência. Como $BE \equiv BC$, e $FE \equiv FC$, os triângulos BEF e BCF serão congruentes pelo caso LLL, logo $B\hat{F}E \equiv B\hat{F}C$.

Da mesma forma, serão congruentes os triângulos GEF e GDF. Logo,

$$G\hat{F}E \equiv G\hat{F}D \ \text{ e } D\hat{G}F \equiv E\hat{G}F.$$

Como

$$180° = \angle(DFE) + \angle(EFC) = 2\angle(GFD) + 2\angle(BFC),$$

temos

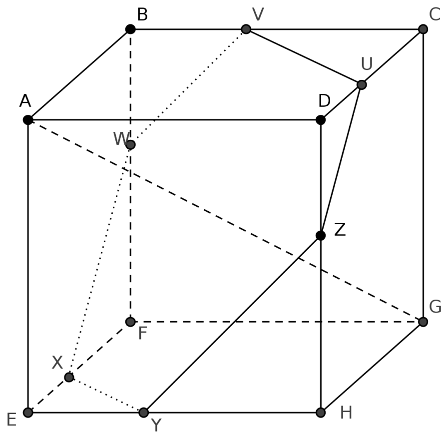
$$\angle(GFD) + \angle(BFC) = 90°,$$

e, como $\angle(CBF) + \angle(BFC) = 90°$, temos $G\hat{F}D \equiv C\hat{B}F$. Assim, os triângulos retângulos BCF e FDG são semelhantes, com

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DG}} \therefore \frac{L}{\frac{L}{2}} = \frac{\frac{L}{2}}{\overline{DG}} \therefore \overline{DG} = \frac{L}{4}$$

Questão 4 [2,0 pt]

Um plano é perpendicular à diagonal AG do cubo $ABCDEFGH$ da figura, de forma que sua interseção com as faces do cubo seja o hexágono $UVWXYZ$.



(a) Mostre que cada lado do hexágono $UVWXYZ$ é paralelo a uma das diagonais da face do cubo em que está contido.

(b) Determine o perímetro do hexágono $UVWXYZ$, sendo 1 a medida da aresta do cubo.

Solução

(a) Primeiramente, observe que a diagonal AG do cubo é ortogonal às diagonais de face ED, BD e BE, pois AG contém a altura do tetraedro $AEDB$. Da mesma forma, AG é ortogonal às diagonais CH, CF e FH.

O plano π considerado, perpendicular a diagonal AG, é paralelo ao plano determinado por E, D e B, portanto, a interseção YZ com a face $ADHE$ é paralela à diagonal ED desta face. Analogamente, UV e WX são paralelos às diagonais BD e BE das faces em que estão.

Da mesma forma, π é paralelo ao plano determinado por C, F e H, portanto, UZ, VW e XY serão paralelos, respectivamente, às diagonais de face CH, CF e FH.

(b) Pelo item (a), serão isósceles os triângulos CUV, BVW, FXW, EXY, HYZ e DUZ. Fazendo $\overline{HY} = a$, teremos então

$$a = \overline{HY} = \overline{HZ} = \overline{UC} = \overline{CV} = \overline{WF} = \overline{XF},$$

$$1 - a = \overline{EY} = \overline{DZ} = \overline{DU} = \overline{BV} = \overline{BW} = \overline{EX}.$$

Assim,

$$\overline{YZ} = \overline{UV} = \overline{WX} = a\sqrt{2},$$

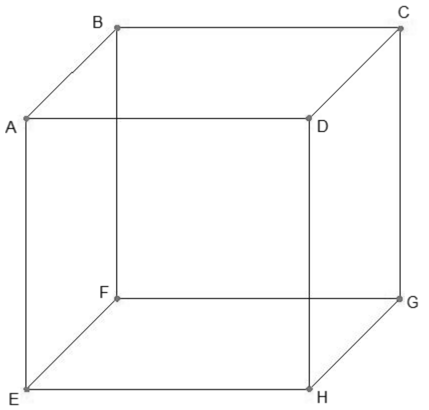
$$\overline{UZ} = \overline{VW} = \overline{XY} = (1 - a)\sqrt{2}.$$

Logo, o perímetro de $UVWXYZ$ é dado por

$$\overline{YZ} + \overline{UV} + \overline{WX} + \overline{UZ} = \overline{VW} = \overline{XY} = 3a\sqrt{2} + 3(1 - a)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Questão 5 [2,0 pt]

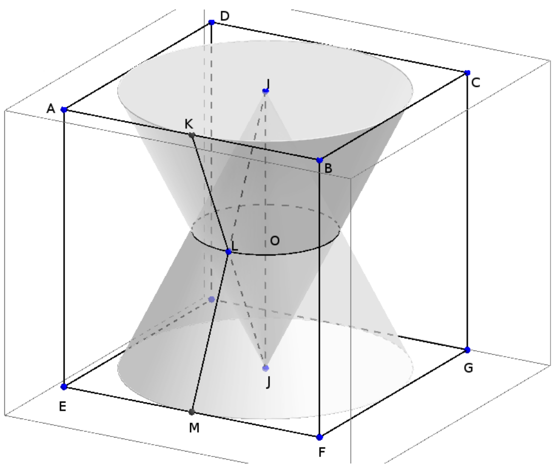
Considere o cubo $ABCDEFGH$ de aresta a. Um cone C_1 tem base inscrita na face $ABCD$ e vértice na intersecção das diagonais da face $EFGH$. Outro cone C_2 tem base inscrita na face $EFGH$ e vértice na intersecção das diagonais da face $ABCD$. Calcule o volume da parte comum a esses dois cones.



Solução

Seja I o ponto na face $ABCD$ que é vértice de um dos cones, e J o ponto na face $EFGH$, vértice do outro cone.

Considere os pontos K e M, interseção de cada um dos cones com as arestas AB e EF, respectivamente (veja a figura).



Como K e M são pontos médios das arestas em que estão, e I e J são os centros de suas faces, $IJMK$ é um retângulo, cujo centro é o ponto L, interseção das geratrizes IM e JK dos cones. A distância de L ao centro O do cubo será dada então por $KI/2 = a/4$. A distância de O a cada um dos pontos I e J será igual a $a/2$.

Assim, a interseção dos cones será um sólido formado por dois cones, cuja base é um círculo de raio $\overline{OL} = a/4$, e cujas alturas OI e OJ medem $a/2$. Portanto, o volume deste sólido é dado por

$$V = 2\left(\frac{\pi\left(\frac{a}{4}\right)^2 \cdot \frac{a}{2}}{3}\right) = \frac{\pi\, a^3}{48}.$$