Questão 1 [2,0 pt]

Prove, por indução em n, que:

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Solução

Seja $P(n)$ a proposição: $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$, para todo $n \geq 1$.

Para $n = 1$ o resultado vale claramente, pois $1 \cdot 2^1 = 2 = (1-1) \cdot 2^{1+1} + 2$.

Suponhamos agora que $P(n)$ é verdadeira para $n = k$, ou seja,

$$1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2.$$

Devemos provar que $P(n)$ continua válida para $n = k+1$. De fato,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2^1 + & 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1} = (k-1) \cdot 2^{k+1} + 2 + (k+1) \cdot 2^{k+1} = \\ & = (k-1+k+1) \cdot 2^{k+1} + 2 = 2k \cdot 2^{k+1} + 2 = (k+1-1) \cdot 2^{k+1+1} + 2, \end{aligned}$$

e assim $P(k+1)$ é verdadeira.

Questão 2 [2,0 pt]

(a) Defina progressão aritmética de primeiro termo a e razão r.

(b) Conjecture uma fórmula para o termo geral a_n em função de a, n e r. Em seguida, prove-a por indução em n.

(c) Se $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, conjecture uma fórmula para S_n em função de a, n e r. Em seguida, prove-a por indução em n.

(d) A partir dos itens (b) e (c), obtenha uma fórmula para S_n em função de a, a_n e r.

Solução

(a) Uma *progressão aritmética* com primeiro a e razão r é uma sequência de números cujo primeiro termo é a e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com a razão. Em símbolos, $a_1 = a$ e $a_n = a_{n-1} + r$, se $n \geq 2$.

(b) Calculemos alguns termos pela definção:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + r = a + r, \\ a_3 &= a_2 + r = a + r + r = a + 2r, \\ a_4 &= a_3 + r = a + 2r + r = a + 3r. \end{aligned}$$

A partir destes cálculos conjecturamos que $a_n = a + (n-1)r$, para todo $n \geq 1$. Vamos provar esta conjectura por indução em n.

Para $n = 1$ é claramente válida, pois $a_1 = a = a + (1-1)r$. Agora supõe que o resultado é válido para um certo $n = k \geq 1$, ou seja, $a_k = a + (k-1)r$. Para $n = k+1$ segue que

$$a_{k+1} = a_{k+1-1} + r = a_k + r = a + (k-1)r + r = a + (k-1+1)r = a + kr,$$

e portanto está provada a conjectura.

(c) Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ e usando o resultado acima podemos escrever a soma

$$S_n = a + [a+r] + [a+2r] + \cdots + [a+(n-3)r] + [a+(n-2)r] + [a+(n-1)r],$$

que também pode ser escrita alterando-se a ordem dos elementos da seguinte forma

$$S_n = [a+(n-1)] + [a+(n-2)r] + [a+(n-3)r] + \cdots + [a+2r] + [a+r] + a.$$

Somando os termos equivalentes nessas duas somas obtemos

$$2S_n = [2a+(n-1)r] + [2a+(n-1)r] + [2a+(n-1)r] + \cdots + [2a+(n-1)r] + [2a+(n-1)r] + [2a+(n-1)r].$$

Logo $2S_n = n[2a+(n-1)r]$ e assim $S_n = \dfrac{n[2a+(n-1)r]}{2}$.

Vamos provar este resultado por indução em n. Para $n = 1$ é fácil ver que $S_1 = a_1 = a = \dfrac{1 \cdot [2a+(1-1)r]}{2}$.

Agora supõe que o resultado vale para um certo $n = k$. Para $n = k+1$ temos que

$$\begin{aligned} S_{k+1} = a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} &= \frac{n[2a+(k-1)r]}{2} + [a+(k+1-1)r] \\ &= \frac{2ka + k(k-1)r + 2a + 2kr}{2} = \frac{2a(k+1) + k(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)[2a+(k+1-1)r}{2}, \end{aligned}$$

e portanto está provada a conjetura.

(d) Pelo item (b) temos que $a_n = a + (n-1)r$ e pelo item (c) $S_n = \dfrac{n[2a+(n-1)r]}{2}$. Logo segue que

$$S_n = \frac{n[a+a+(n-1)r]}{2} = \frac{n[a+a_n]}{2}.$$

Questão 3 **[2,0 pt]**

(a) Prove a *Convolução de Vandermonde*:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} &= \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} \\ &+ \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{r}. \end{aligned}$$

Sugestão: *Considere um grupo com n homens e m mulheres. Calcule, de duas maneiras diferentes, a quantidade de comissões de tamanho r que podem ser formadas com pessoas desse grupo.*

(b) Usando o item (a), deduza a *Identidade de Lagrange*:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Solução

(a) Consideremos um grupo com n homens e m mulheres, do qual iremos escolher uma comissão com r pessoas, onde $0 \le r \le m+n$. Se $0 \le k \le r$ é a quantidade de homens na comissão, então a comissão terá $r-k$ mulheres. Para cada k temos $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher os k homens e $\binom{m}{r-k}$ maneiras de escolher as $r-k$ mulheres. Pelo princípio multiplicativo temos que, para cada k, podemos escolher a comissão de tamanho r de $\binom{n}{k} \cdot \binom{m}{r-k}$ maneiras. Fazendo a soma para k de 0 (nenhum homem na comissão) até r (comissão formada só por homens) temos

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \cdots + \binom{n}{r}\binom{m}{0}$$

maneiras de escolher a comissão.

Por outro lado, escolher r pessoas de um grupo de n homens e m mulheres é exatamente escolher r pessoas de um grupo de $m+n$ pessoas que é igual a $\binom{n+m}{r}$. Assim segue o resultado.

(b) Nesse caso consideremos a igualdade do item (a) com $m = n = r$. Logo temos que

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} \quad = \binom{2n}{n}.$$

Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, segue o resultado.

Questão 4 [2,0 pt]

(a) Imagine que um prédio de quatro andares deva ser pintado usando-se uma cor para cada andar. Sabendo que as cores utilizadas podem ser verde e amarelo e que andares consecutivos não poderão ser pintados de amarelo, de quantas maneiras é possível fazer a pintura deste prédio?

(b) Resolva o mesmo problema para um prédio de 10 andares.

Solução

(a) Denotaremos por p_n o número de configurações válidas de pintura para um prédio de n andares. Para calcular p_4, separaremos as configurações em dois casos: as que tem o último andar verde e as que tem o último andar amarelo. Se uma determinada configuração tem o último andar verde, os três primeiros andares podem ter qualquer configuração válida de pintura, isto é, p_3 configurações. Agora, se uma determinada configuração possui o último andar amarelo, o penúltimo andar deve ser verde por não podermos ter andares consecutivos pintados de amarelo, e os dois primeiros andares podem ter qualquer configuração válida, isto é, p_2 configurações. Sendo assim,

$$p_4 = p_3 + p_2.$$

Do mesmo modo,

$$p_3 = p_2 + p_1.$$

Temos que $p_1 = 2$ e $p_2 = 3$ (configurações AV, VA, VV). Portanto, $p_3 = 5$ e $p_4 = 8$.

(b) Seguindo o raciocínio do item anterior, temos que

$$p_3 = 5, p_4 = 8 \text{ e } p_n = p_{n-1} + p_{n-2}, \text{ para } n \geq 5.$$

Para calcular p_{10} utilizamos esta recorrência. Portanto:

$$\begin{aligned}
p_5 &= p_4 + p_3 = 8 + 5 = 13\\
p_6 &= p_5 + p_4 = 13 + 8 = 21\\
p_7 &= p_6 + p_5 = 21 + 13 = 34\\
p_8 &= p_7 + p_6 = 34 + 21 = 55\\
p_9 &= p_8 + p_7 = 55 + 34 = 89\\
p_{10} &= p_9 + p_8 = 89 + 55 = 144.
\end{aligned}$$

Questão 5 **[2,0 pt]**

Dados a e b dois números reais positivos, use a desigualdade das médias para encontrar o valor mínimo e o ponto em que esse valor mínimo ocorre, para cada uma das funções abaixo:

(a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x^2}$.

(b) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x}$.

Sugestão: *Inspire-se no seguinte exemplo. Considere $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+5}$. Pela desigualdade das médias, temos que*

$$x^2 + 5 = x^2 + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} + \frac{5}{3} \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3}} = 4\sqrt[4]{\frac{125}{27}}\sqrt{x}.$$

Logo $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+5} \leq \dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$ e a igualdade ocorre se e só se $x^2 = \dfrac{5}{3}$. Portanto o valor máximo de f é $\dfrac{1}{4}\sqrt[4]{\dfrac{27}{125}}$ e ocorre para $x = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

Solução

(a) Pela desigualdade das médias temos que $ax^2 + \dfrac{b}{x^2} \geq 2\sqrt{ax^2 \cdot \dfrac{b}{x^2}} = 2\sqrt{ab}$ e a igualdade vale apenas no caso em que $ax^2 = \dfrac{b}{x^2}$, ou seja, para $x = \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$. Portanto o valor mínimo de f é $2\sqrt{ab}$ e ocorre para $x = \sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$.

(b) Pela desigualdade das médias temos que

$$ax^2 + \frac{b}{x} = ax^2 + \frac{b}{2x} + \frac{b}{2x} \geq 3\sqrt[3]{ax^2 \cdot \frac{b}{2x} \cdot \frac{b}{2x}} = 3\sqrt[3]{\frac{ab^2}{4}}$$

e a igualdade vale apenas no caso em que $ax^2 = \dfrac{b}{2x}$, ou seja, para $x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{2a}}$. Portanto o valor mínimo de f é $3\sqrt[3]{\dfrac{ab^2}{4}}$ e ocorre para $x = \sqrt[3]{\dfrac{b}{2a}}$.