

Questão 1 [2,0 pt]

Sejam A, B, C conjuntos. Prove que

(a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

(b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

As identidades acima são versões para três conjuntos das “leis de De Morgan”, em homenagem ao matemático Augustus De Morgan (1806-1871), um dos pais da lógica matemática moderna.

Questão 2 [2,0 pt]

Prove que $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ é uma bijeção.

Questão 3 [2,0 pt]

Prove que $\log_{10} 2$ não é um número racional.

Questão 4 [2,0 pt]

Apesar do “grau Celsius” ($^{\circ}\text{C}$) ser a medida mais usada para a temperatura, alguns países, como os Estados Unidos, usam outra medida de temperatura, o “grau Fahrenheit” ($^{\circ}\text{F}$). Sabendo que os pontos de fusão e ebulição da água são 0°C e 100°C , respectivamente, e 32°F e 212°F , respectivamente, determine uma função afim que relaciona as temperaturas medidas em graus Celsius e graus Fahrenheit.

Questão 5 [2,0 pt]

Considere o conjunto dos números racionais diádicos $D = \left\{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$.

(a) Prove que se a e b são números reais tais que $a < b$, então existe $d \in D$ tal que $a < d < b$.

(b) A partir do item (a) conclua que em qualquer intervalo (a, b) existem infinitos números racionais diádicos.