

**Questão 1.**

Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 3,5 litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

- (1.0) (a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?
- (1.0) (b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo 3,5 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

Questão 2.

- (1.0) (a) Quais são os valores de y para os quais existe uma função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$?
- (1.0) (b) Tome $y = 9$ e determine a função quadrática correspondente. Justifique seus argumentos.

Questão 3.

- (1.0) (a) Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Dê as definições de $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$, para $X \subset A$ e $Y \subset B$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, determine os conjuntos $f(\mathbb{R})$ e $f^{-1}(3)$.
- (1.0) (b) Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Prove que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, quaisquer que sejam $X, Y \subset A$. Dê um exemplo em que $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Questão 4.

- (0.5) (a) Se $r \neq 0$ é um número racional, prove que $r\sqrt{2}$ é irracional.
- (0.5) (b) Dado qualquer número real $\epsilon > 0$, prove que existe um número irracional α tal que $0 < \alpha < \epsilon$.
- (1.0) (c) Mostre que todo intervalo $[a, b]$, com $a < b$, contém algum número irracional.

Questão 5.

Sejam m e n números naturais primos entre si.

- (1.0) (a) Mostre que $\frac{m}{n}$ é equivalente a uma fração decimal (isto é, com denominador potência de 10) se, e somente se, n não tem fatores primos diferentes de 2 ou 5.
- (1.0) (b) Mostre que se n tem outros fatores primos além de 2 ou 5 então a expansão decimal é infinita e, a partir de um certo ponto, periódica.