

Questão 1 [2,0 pt]

- (a) Defina progressão geométrica de primeiro termo a e razão q ($q \neq 0$ e $q \neq 1$).
- (b) Conjecture uma fórmula para o termo geral a_n em função de a, n e q . Em seguida, prove essa fórmula por indução em n .
- (c) Se $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, conjecture uma fórmula para S_n em função de a, n e q . Em seguida, prove essa fórmula por indução em n .
- (d) A partir dos itens (b) e (c), obtenha uma fórmula para S_n em função a, a_n e q .

Solução

- (a) Uma *progressão geométrica* com primeiro termo a e razão q ($q \neq 0$ e $q \neq 1$) é uma sequência de números cujo primeiro termo é a e tal que, cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado pela razão.

Em símbolos, $a_1 = a$ e $a_n = a_{n-1} \cdot q$, se $n \geq 2$.

- (b) Calculemos alguns termos pela definição:

$$a_2 = a_1 \cdot q = aq, a_3 = a_2 \cdot q = aq \cdot q = aq^2, a_4 = a_3 \cdot q = aq^2 \cdot q = aq^3.$$

A partir destes cálculos, conjecturamos que $a_n = aq^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.

Vamos provar esta conjectura por indução em n .

Para $n = 1$ é claramente válida, pois $a_1 = a = aq^0 = aq^{1-1}$.

Agora suponhamos que o resultado é válido para um certo $n = k \geq 1$, ou seja, $a_k = aq^{k-1}$.

Para $n = k + 1$ segue que $a_{k+1} = a_{k+1-1} \cdot q = a_k \cdot q = aq^{k-1} \cdot q = aq^k$ e portanto está provada a conjectura.

- (c) Temos que $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ e usando o resultado acima podemos reescrever a soma

$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$. Multiplicando ambos os lados por q segue que

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n.$$

Logo temos que $S_n - qS_n = a - aq^n$, ou seja, $(1 - q)S_n = a - aq^n$ e podemos conjecturar que

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ para todo } n \geq 1.$$

Vamos provar este resultado por indução em n .

Para $n = 1$ é fácil ver que $S_1 = a_1 = a = \frac{a(1 - q)}{1 - q}$.

Agora suponhamos que o resultado vale para um certo $n = k$.

Para $n = k + 1$ temos que

$$S_{k+1} = a_1 + \dots + a_k + a_{k+1} = \frac{a(1 - q^k)}{1 - q} + aq^k = \frac{a - aq^k + aq^k - aq^{k+1}}{1 - q} = \frac{a(1 - q^{k+1})}{1 - q} \text{ e portanto está provada a conjectura.}$$

- (d) Pelo item (b) temos que $a_n = aq^{n-1}$ e pelo item (c) $S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$.

Logo segue que

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a - aq^{n-1}q}{1 - q} = \frac{a - a_nq}{1 - q}.$$

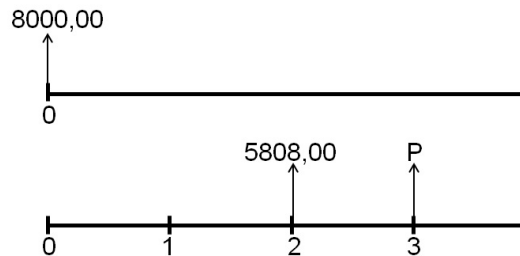
Questão 2 [2,0 pt]

Um comerciante contraiu um empréstimo de R\$ 8000,00 a juros semestrais de 10%. O pagamento foi realizado em duas parcelas, uma de R\$ 5808,00 após um ano da contratação do empréstimo e a outra seis meses após a primeira.

- (a) Calcule o valor da segunda parcela do empréstimo.
- (b) Caso o comerciante optasse por quitar a dívida em 3 parcelas semestrais fixas, a primeira a partir do 1º semestre após a contratação do empréstimo, qual seria o valor das parcelas?

Solução

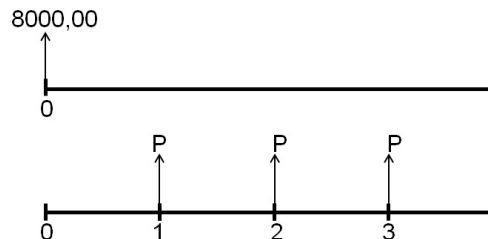
- (a) Considerando os esquemas de pagamentos da figura, ambos são equivalentes, ou seja, R\$ 8000,00, na data zero, tem o mesmo valor de R\$ 5808,00 dois semestres após (data 2), mais um pagamento P , na data 3.



Igualando os valores, na época zero, dos pagamentos em ambos os esquemas, obtemos:

$$\begin{aligned} 8000 &= \frac{5808}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3} \Rightarrow 8000 = \frac{5808}{1,21} + \frac{P}{1,331} \Rightarrow 8000 = 4800 + \frac{P}{1,331} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3200 = \frac{P}{1,331} \Rightarrow P = 4259,20 \end{aligned}$$

- (b) Considerando os esquemas equivalentes de pagamentos da figura, o pagamento de R\$ 8000,00 na data zero tem o mesmo valor de 3 parcelas semestrais P , a partir do primeiro semestre após a contratação.



Igualando os valores dos pagamentos de ambos os esquemas, na data zero, obtemos:

$$\begin{aligned} 8000 &= \frac{P}{1,1} + \frac{P}{1,1^2} + \frac{P}{1,1^3} \Rightarrow 8000 = \frac{1,21P + 1,1P + P}{1,331} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 10648 = 3,31P \Rightarrow P = \frac{10648}{3,31} \Rightarrow P = 3216,92 \end{aligned}$$

Questão 3 [2,0 pt]

Resolva a equação de recorrência $T_n = 4T_{n-1} + 2^n$, $T_0 = 9$.

Solução

Uma solução não-nula de $T_n = 4T_{n-1}$ é, por exemplo, $T_n = 4^n$. Agora fazemos a substituição $T_n = 4^n y_n$ e obtemos $4^n y_n = 4 \cdot 4^{n-1} y_{n-1} + 2^n$, ou seja, $y_n = y_{n-1} + 2^{-n}$, para $n \geq 1$.

Daí temos que

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + 2^{-1} \\y_2 &= y_1 + 2^{-2} \\y_3 &= y_2 + 2^{-3} \\&\dots\dots \\y_n &= y_{n-1} + 2^{-n}.\end{aligned}$$

Somando as parcelas da esquerda e da direita, das igualdades acima, temos

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n = y_0 + 2^{-1} + y_1 + 2^{-2} + y_2 + 2^{-3} + \dots + y_{n-1} + 2^{-n}.$$

Cancelando os termos obtemos

$$y_n = y_0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-n} = y_0 + \frac{2^{-1} [1 - (2^{-1})^n]}{1 - 2^{-1}} = y_0 + 1 - 2^{-n}.$$

Como $T_n = 4^n y_n$ e $T_0 = 9$, temos $y_0 = 9$ e $y_n = 10 - 2^{-n}$. Portanto,

$$T_n = 4^n (10 - 2^{-n}) = 10 \cdot 4^n - 2^n.$$

Questão 4 [2,0 pt]

Considere a seqüência $a_1 = 2, a_2 = 3$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Prove, por indução em n , que:

(a) $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para todo $n \geq 1$.

(b) $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para todo $n \geq 4$.

Solução

(a) Seja $P(n)$ a proposição: $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para todo $n \geq 1$.

Para $n = 1$ temos que $a_1 = 2 > \frac{8}{5}$.

Suponhamos agora que $P(n)$ é verdadeira até $n = k$, ou seja, $a_n > \left(\frac{8}{5}\right)^n$, para $n = 1, \dots, k$. Devemos provar que $P(n)$ continua válida para $n = k + 1$. De fato,

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} > \left(\frac{8}{5}\right)^k + \left(\frac{8}{5}\right)^{k-1} = \left(\frac{8}{5}\right)^k \left(1 + \frac{5}{8}\right) = \left(\frac{8}{5}\right)^k \cdot \frac{13}{8} > \left(\frac{8}{5}\right)^k \cdot \frac{8}{5} = \left(\frac{8}{5}\right)^{k+1}.$$

e assim $P(k + 1)$ é verdadeira.

(b) Agora seja $Q(n)$ a proposição: $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para todo $n \geq 4$.

Para $n = 4$ temos que $a_4 = 8 < \frac{83521}{1000} = \left(\frac{17}{10}\right)^4$.

Suponhamos agora que $Q(n)$ é verdadeira até $n = k$, ou seja, $a_n < \left(\frac{17}{10}\right)^n$, para $n = 4, \dots, k$.

Devemos provar que $Q(n)$ continua válida para $n = k + 1$. De fato,

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} < \left(\frac{17}{10}\right)^k + \left(\frac{17}{10}\right)^{k-1} = \left(\frac{17}{10}\right)^k \left(1 + \frac{10}{17}\right) = \left(\frac{17}{10}\right)^k \cdot \frac{27}{17} < \left(\frac{17}{10}\right)^k \cdot \frac{17}{10} = \left(\frac{17}{10}\right)^{k+1}.$$

e assim $Q(k + 1)$ é verdadeira.

Questão 5 [2,0 pt]

Quantas soluções inteiras e positivas ($x > 0$ e $y > 0$) possui a equação $2x + 3y = 2014$?

Solução

Inicialmente observemos que se (x_0, y_0) é uma solução inteira ($x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$) da equação $2x + 3y = 2014$, então $(x_0 - 3t, y_0 + 2t), t \in \mathbb{Z}$, são todas as soluções inteiras da mesma. Com isso é suficiente obter uma solução inteira.

É fácil ver que $(1007, 0)$ é uma solução. Então as soluções inteiras são dadas por $x = 1007 - 3t, y = 2t, t \in \mathbb{Z}$. Como desejamos apenas soluções positivas ($x > 0$ e $y > 0$), devemos ter $1007 - 3t > 0$ e $2t > 0$. Resolvendo ambas as inequações obtemos $0 < t < \frac{1007}{3}$. Mas como $\frac{1007}{3} = 335,66\dots$ e t deve ser inteiro segue que $1 \leq t \leq 335$.

Portanto a equação $2x + 3y = 2014$ possui 335 soluções inteiras positivas, a saber $x = 1007 - 3t, y = 2t, 1 \leq t \leq 335$.

Outra solução

É fácil que uma solução da equação é $x_0 = 1007$ e $y_0 = 0$, mas essa solução não é positiva. A partir dela podemos criar várias soluções $x = 1007 - 3n, y = 2n$, com n inteiro positivo, que formam progressões aritméticas de razão -3 e 2 em x e y , respectivamente.

Como desejamos que x também seja positivo devemos ter $1007 - 3n > 0$, ou seja, $n \leq 335$. Portanto a equação $2x + 3y = 2014$ possui 335 soluções inteiras positivas, a saber $x = 1007 - 3n, y = 2n, 1 \leq n \leq 335$.