Questão 1.

Num porta-CDs, cabem 10 CDs colocados um sobre o outro, formando uma pilha vertical. Tenho 3 CDs de MPB, 5 de rock e 2 de música clássica.

(a) De quantos modos diferentes posso empilhá-los de modo que todos os CDs de rock fiquem juntos?

(b) De quantos modos posso escolher 4 CDs para levar em uma viagem, de modo que eu leve pelo menos um CD de cada tipo de música?

UMA SOLUÇÃO

(a) Vamos fixar as posições dos CDs atribuindo números de 1 a 10 a suas posições, contando de baixo para cima. Se todos os 5 CDs de rock ficam juntos, o primeiro pode ficar nas posições de 1 a 6, portanto são 6 escolhas para a posição do bloco de CDs de rock. Os 5 CDs de rock podem ser arrumados de $5! = 120$ maneiras dentro do bloco. As posições restantes são 5 e os demais CDs também podem ser ordenados de 120 maneiras nessas posições restantes (não importa que o bloco de CDs de rock interrompa a sequência). Portanto são $6 \cdot 120 \cdot 120$, isto é, 86400 maneiras.

(b) Para escolher 4 CDs com pelo menos um para cada tipo de música, podemos escolher, primeiro, um de cada tipo. Temos 3 possibilidades para MPB, 5 para rock e 2 para música clássica, perfazendo $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$ possibilidades. Depois dessa escolha, podemos pegar qualquer um dos 7 CDs restantes. São, portanto, $30 \cdot 7 = 210$ escolhas. No entanto, temos que dividir por 2 esse valor, já que os dois CDs de mesmo gênero, digamos A e B, podem aparecer com A na primeira escolha e B na segunda, ou vice-versa.

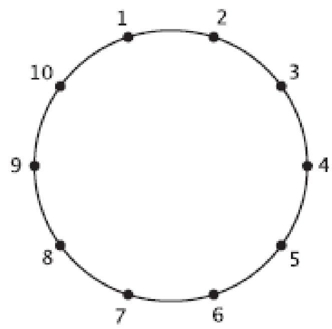
Outra maneira de resolver (mais complicada, mas que evita a divisão por dois no final): dos 4 CDs, *dois são do mesmo gênero* (e os outros dois dos dois outros gêneros restantes). Se os dois de gênero repetido forem de música clássica, são todos os disponíveis para esse gênero, de forma que restam $3 \cdot 5$ escolhas para os outros dois; são, portanto, 15 possibilidades para se ter 2 CDs repetidos de música clássica. Se os dois de gênero repetido forem de MPB, há $C_{3,2} = 3$ escolhas para eles; para cada uma delas, restam $2 \cdot 5$ escolhas dos outros dois; portanto, são 30 maneiras para se ter dois CDs de MPB. Finalmente, se os dois de gênero repetido forem de rock, há $C_{5,2} = 10$ escolhas para os dois repetidos, e $2 \cdot 3$ escolhas para os outros dois, perfazendo $6 \cdot 10 = 60$ possibilidades com dois CDs de rock. No total, são $60 + 30 + 15 = 105$ possibilidades.

Questão 2.

Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.

(a) Se forem retiradas duas bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam extremidades de um diâmetro?

(b) Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo isósceles?



UMA SOLUÇÃO

(a) A primeira bola pode ser qualquer uma. Das 9 restantes, apenas uma será diametralmente oposta a essa primeira. Portanto a probabilidade de isso ocorrer é de $1/9$.

(b) Escolhidos 3 pontos da figura, ficam definidos também 3 intervalos entre eles. Lados iguais de um triângulo ocorrem se, e somente se, os correspondentes intervalos entre os pontos são iguais. Em particular, (i) os pontos formam um triângulo isósceles se, e somente se, pelo menos dois desses intervalos são iguais; (ii) nenhum triângulo equilátero pode ser formado, já que 10 não é divisível por 3.

Nunca havendo 3 intervalos iguais, definimos de forma unívoca o "ponto do meio´´ de um triângulo isósceles àquele ladeado pelos dois intervalos iguais. Há 10 possibilidades para esse ponto do meio. Os intervalos iguais que ladeiam esse ponto do meio podem ter os tamanhos: $1/10$, $2/10$, $3/10$ e $4/10$. Portanto são $10 \cdot 4 = 40$ maneiras de tomar 3 desses 10 pontos como vértices de um triângulo isósceles.

Por outro lado, há $C_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8/6 = 120$ maneiras de se escolher 3 entre as 10 bolas. Portanto, dessas 120 escolhas, 40 levarão a um triângulo isósceles, e a probabilidade de isso ocorrer será de $40/120 = 1/3$.

Questão 3.

Em uma caixa foram colocados um cartão no qual está escrito o número 1, dois cartões nos quais está escrito o número 2, três cartões com o número 3 e assim por diante, até dez cartões com o número 10.

(a) Qual é o número mínimo de cartões que devem ser retirados da caixa, sem olhar, de modo que se tenha certeza de que haja, entre os cartões retirados, 5 deles com o mesmo número?

(b) Qual é o número mínimo de cartões que devem ser retirados da caixa, sem olhar, de modo que se tenha certeza de que haja, entre os cartões retirados, pelo menos um par de cartões com diferença maior do que 5?

UMA SOLUÇÃO

(a) Os 5 cartões de mesmo número não podem ser os cartões numerados de 1 a 4. Esses cartões são 10. Há 6 números que são candidatos a terem 5 cartões repetidos: 5, 6, 7, 8, 9 e 10. Então, pelo Princípio das Gavetas, é suficiente retirar $10 + 4 \cdot 6 + 1 = 35$ cartões.

(b) Não aparecem dois números com diferença maior do que 5 enquanto todos os cartões retirados tiverem todos os números dentro de uma mesma sequência de 6 números consecutivos (um "bloco de 6"). Os blocos de 6 possíveis são: 1-2-3-4-5-6, 2-3-4-5-6-7, 3-4-5-6-7-8, 4-5-6-7-8-9 e 5-6-7-8-9-10. O bloco com mais cartões é o último: ele tem $5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$ cartões. Então, pelo Princípio das Gavetas, com 46 cartões retirados não é possível que todos eles estejam num mesmo bloco de 6, ou seja, certamente existirá um par com diferença maior do que 5.

Questão 4.

A média aritmética de 10 números positivos é igual a 1. Os números são agrupados aos pares e os números de cada par somados, resultando daí um conjunto de 5 números positivos.

(a) O que se pode dizer sobre a média aritmética desses 5 números?

(b) Mostre que o produto desses 5 números é menor ou igual a 32.

UMA SOLUÇÃO

(a) Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$ os 10 números positivos. A primeira informação é de que

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}}{10} = 1\,.$$

Ao agruparmos aos pares esses números e somarmos, obteremos a mesma soma do numerador. Mas, ao tirar a média dos 5, dividiremos por 5, e não por 10. Portanto o resultado será igual a 2.

(b) Sejam y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 os 5 números positivos aos quais se refere o enunciado. A média geométrica dos 5 números é menor ou igual a sua média aritmética, isto é,

$$\sqrt[5]{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5} \leq \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}\,.$$

Acabamos de concluir, no item (a), que o lado direito é igual a 2. Daí resulta

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5 \leq 2^5 = 32\,.$$

Questão 5.

Uma moeda, com probabilidade 0,6 de dar cara, é lançada duas vezes.

(a) Qual é a probabilidade de que se observem resultados iguais no primeiro e segundo lançamentos?

(b) Dado que os resultados observados no primeiro e segundo lançamentos são iguais, qual é a probabilidade condicional de que o resultado observado neles seja cara?

UMA SOLUÇÃO

(a) Evidentemente está-se supondo que os lançamentos são independentes. Para aparecerem resultados iguais nos dois primeiros lançamentos, ou ocorrem duas caras, com probabilidade $0,6 \times 0,6 = 0,36$, ou duas coroas, com probabilidade $0,4 \times 0,4 = 0,16$. Sendo cara-cara e coroa-coroa dois eventos disjuntos (se um deles ocorre o outro não ocorre), a probabilidade total de ocorrerem dois resultados iguais nos dois primeiros lançamentos é de $0,36 + 0,16 = 0,52$.

(b) Se já se sabe que vão sair dois resultados iguais, a probabilidade de que seja cara-cara é de

$$\frac{0,36}{0,52} = \frac{36}{52} = \frac{9}{13}\,.$$