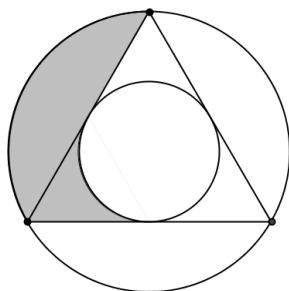


**Questão 1**

(2,0) A figura abaixo mostra um triângulo equilátero e suas circunferências inscrita e circunscrita. A circunferência menor tem raio 1.

Calcule a área da região sombreada.



**Questão 2**

O poliedro  $P$  que inspirou a bola da Copa de 70 é formado por faces pentagonais e hexagonais, e é construído da seguinte forma:

- Considere um icosaedro regular de aresta  $a$  (Fig. 1 abaixo).
- A partir de um vértice e sobre cada uma das 5 arestas que concorrem nesse

vértice, assinale os pontos que estão a uma distância de  $\frac{a}{3}$  desse vértice. Esses

5 pontos formam um pentágono regular (Fig. 2).

- Retirando a pirâmide de base pentagonal que ficou formada obtemos a Fig. 3.

- Repetindo a mesma operação para todos os vértices do icosaedro obtém-se o poliedro  $P$ .

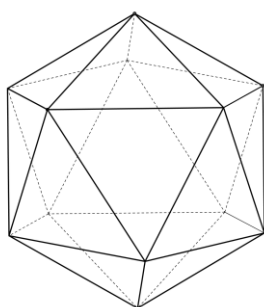


Fig. 1

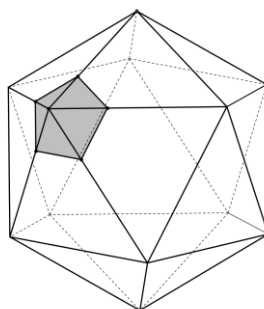


Fig. 2

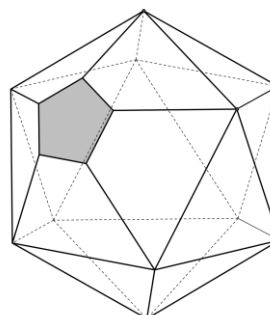


Fig. 3

(0,5) (a) Determine quantas são as faces pentagonais e quantas são as faces hexagonais de  $P$ .

(0,7) (b) Determine os números de arestas, faces e vértices de  $P$ .

(0,8) (c) Sabendo que uma diagonal de um poliedro é todo segmento que une dois vértices que não estão na mesma face, determine o número de diagonais de  $P$ .

### Questão 3

*Definição:* Dado um segmento  $AB$ , o *plano mediador* desse segmento é o plano perpendicular a  $AB$  que contém o seu ponto médio.

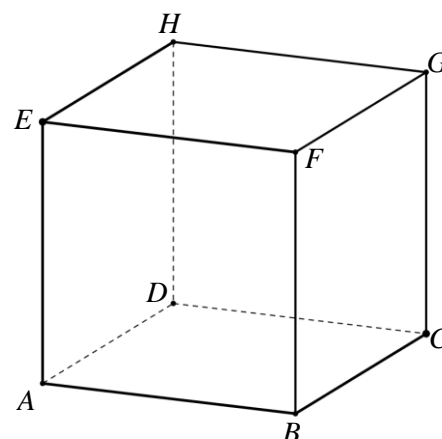
#### 1ª Parte

(2,0) Prove que um ponto  $P$  equidista de dois pontos  $A$  e  $B$  se, e somente se, pertence ao plano mediador de  $AB$ .

#### 2ª Parte

A figura abaixo mostra o cubo  $ABCD-EFGH$  de aresta  $a$ .

Sejam  $M, N, P, Q, R$  e  $S$  os pontos médios das arestas  $AB, BF, FG, GH, HD$  e  $DA$ .



(0,5) (a) Mostre que esses seis pontos são coplanares.

*Sugestão:* Mostre que qualquer um deles pertence ao plano mediador da diagonal  $EC$  do cubo (a propriedade enunciada na primeira parte da questão pode ser utilizada mesmo que você não a tenha demonstrado).

(0,5) (b) Mostre que o hexágono  $MNPQRS$  é regular.

(1,0) (c) Calcule o volume da pirâmide de vértice  $E$  e base  $MNPQRS$ .

#### 3ª Parte

A figura abaixo mostra o cubo  $ABCD-EFGH$  de aresta  $a$ .

(1,0) (a) Mostre que as retas  $DB$  e  $EC$  são ortogonais.

(1,0) (b) Calcule o comprimento da perpendicular comum entre  $DB$  e  $EC$ .

