Segunda Prova de Aritmética - MA14

2012/2º semestre

NOME: ____

Problema 1 (*valor: 2 pontos*) Sejam $n \in \mathbb{Z}$ e p um número primo. Denota-se com $E_p(n)$ o expoente da maior potência de p que divide n.

a) Justifique a seguinte afirmação sobre dois números naturais m e n:

$$m = n \iff E_p(m) = E_p(n) \text{ para todo número primo } p.$$

b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Mostre que

$$[a, b, c]^2(a, b)(a, c)(b, c) = (a, b, c)^2[a, b][a, c][b, c]$$

Sugestão: *Note que dada a simetria dessa expressão em a, b e c, pode-se supor sem perda de generalidade que* $E_p(a) \leqslant E_p(b) \leqslant E_p(c)$.

Problema 2 (*valor: 2 pontos*) Mostre que

a) $7|3^{2n+1} + 2^{n+2}$ b) $37|3\underbrace{00\ldots0}_{3n}7$

Problema 3 (*valor: 2 pontos*) Considere os números da forma

$$\alpha_n = \frac{10^n - 1}{9}.$$

a) Mostre que $9|\alpha_n \iff 9|n$.

b) Mostre que $11|\alpha_n \iff n$ é par.

Problema 4 (*valor: 2 pontos*) Ache todos os números que deixam resto 2, quando divididos por 7, deixam resto 3, quando divididos por 11 e deixam resto 5, quando divididos por 13. Aponte a menor solução positiva.

Problema 5 (*valor: 2 pontos*) Seja φ a função de Euler que associa a cada número natural $m > 1$ o número de inteiros entre 0 e m que são primos com m. Mostre que

a) Se $m > 2$, então $\varphi(m)$ é par. Conclua, nessas condições, que $\mathbb{Z}_m$ tem sempre um número par de elementos invertíveis.

b) O número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_{2m}$ é igual ao número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_m$, se m é ímpar, e igual ao dobro desse número, se m é par.

c) Mostre que o número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_{m^2}$ é m vezes o número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_m$.

d) Relacione o número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_{m^r}$ com o número de elementos invertíveis de $\mathbb{Z}_m$, sendo r um inteiro positivo.