Questão 1. Sejam a, x números reais positivos, com $\sqrt{a} < x$. Pondo $y = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$, prove que $\sqrt{a} < y < x$.

UMA SOLUÇÃO

Primeiro notamos que x é maior do que $\frac{a}{x}$: $\sqrt{a} < x$ significa $a < x^2$, logo $\frac{a}{x} < x$, usando que x é positivo. Como y é a média aritmética dos números x e $\frac{a}{x}$, dos quais x é o maior, então $y < x$.

Outra maneira:

$$y = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) < \frac{1}{2}(x + \frac{x^2}{x}) = x\,,$$

usando $a < x^2$.

Além disso, como a média aritmética de dois números diferentes é maior do que a média geométrica e como a média geométrica de x e $\frac{a}{x}$ é igual a $\sqrt{a}$, resulta que $y > \sqrt{a}$.

Essa última desigualdade também poderia ser feita diretamente:

$$y^2 = \frac{1}{4}(x^2 + 2a + \frac{a^2}{x^2}) = \frac{1}{4}(x^2 - 2a + \frac{a^2}{x^2} + 4a) = a + \frac{1}{4}(x - \frac{a}{x})^2 > a\,.$$

Questão 2. A *imagem* (ou conjunto de valores) de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é o conjunto $f(\mathbb{R})$ cujos elementos são os números $f(x)$, onde x é qualquer número real.

Determine as imagens da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = rx + s$, e da função quadrática $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$. Discuta as possibilidades e justifique suas afirmações.

UMA SOLUÇÃO

Para a função afim f, há duas possibilidades: se $r = 0$ então f é constante e sua imagem é o conjunto $\{s\}$, com um só elemento. A segunda possibilidade ocorre se $r \neq 0$. Então $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ pois, dado qualquer $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, ou seja, $rx + s = y$. Basta tomar $x = \frac{y-s}{r}$.

No caso da função quadrática $g(x) = ax^2 + bx + c$, há duas possibilidades para a imagem $g(\mathbb{R})$. Se $a > 0$ então a imagem é a semirreta (intervalo infinito) $[k, +\infty)$ e se $a < 0$ então $f(\mathbb{R}) = (-\infty, k]$, onde k (em ambos os casos) é igual a

$$g(-\frac{b}{a}) = \frac{4ac - b^2}{4a}\,.$$

Justificando: se $a > 0$ então, tomando qualquer $y \in [k, +\infty)$, ou seja, $y \geq k$, para achar $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, devemos mostrar que a equação $ax^2 + bx + c = y$, isto é, $ax^2 + bx + c - y = 0$, possui raízes reais. Isto ocorre se, e somente se, seu discriminante $b^2 - 4a(c - y)$ é maior do que ou igual a 0. Como $y \geq \frac{4ac-b^2}{4a}$, isto sempre ocorre.

O que acabamos de mostrar foi que $[k, +\infty) \subset g(\mathbb{R})$. Para ver que $g(\mathbb{R}) \subset [k, +\infty)$, basta observar que, em virtude da forma canônica $g(x) = a(x - m)^2 + k$, quando $a > 0$ todos os valores $g(x)$ são maiores do que ou iguais a k.

A discussão do caso $a < 0$ é inteiramente análoga.

Questão 3. Uma torneira leva x horas para encher um tanque, outra leva y horas e uma terceira enche esse mesmo tanque em z horas. Em quanto tempo as três juntas encherão o tanque?

UMA SOLUÇÃO

As três torneiras separadamente, abertas durante uma hora, encherão respectivamente as frações $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ e $\frac{1}{z}$ do tanque e, abertas juntas, encherão $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ do tanque. Logo, juntas, encherão o tanque em

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{xyz}{yz + xz + xy}$$

horas.

Questão 4. Uma cultura de bactérias, cuja população é medida pela área que ocupa sobre uma superfície plana, ficou 64 vezes maior após 1 ano. Quantas vezes maior ela estava após 1 trimestre?

UMA SOLUÇÃO

Seja p_0 a população inicial. Após decorrido o tempo t, a população será $p_0 a^t = p$, onde a é uma constante maior do que 1, determinada experimentalmente. Medindo o tempo em meses, temos $p = p_0 a^{12} = 64 p_0$, após 1 ano. Quer-se saber o valor de $p = p_0 a^3$. De $a^{12} p_0 = 64 p_0$ temos $a^{12} = 64$ e daí $a^3 = \sqrt[4]{64} = 2\sqrt{2} \simeq 2,83$. Portanto, após um trimestre, a população de bactérias estava $2,83$ vezes maior do que a população original.

Questão 5. Seja r o raio da circunferência sobre a qual estão os vértices do triângulo ABC. Se a é a medida do lado oposto ao ângulo $\widehat{A}$, prove que sen $\widehat{A} = \frac{a}{2r}$ (*dica:* baixe, do centro da circunferência, a perpendicular a BC). Conclua daí a Leis dos Senos.

UMA SOLUÇÃO

Seja O o centro da circunferência e seja P no segmento BC tal que OP é perpendicular a BC. É sabido que o ângulo BOC (ângulo central da corda BC) é o dobro do ângulo inscrito $\widehat{A}$ (fato conhecido como o Teorema do Ângulo Inscrito). Como o triângulo BOC é isósceles, então OP é bissetriz e, portanto, o ângulo POC é exatamente igual a $\widehat{A}$. Também pelo fato de BOC ser isósceles, OP é mediatriz, de forma que $PC = \frac{a}{2}$. Sendo $OC = r$ e OPC triângulo-retângulo, segue que sen $(\widehat{A}) = \frac{PC}{OC} = \frac{a/2}{r} = \frac{a}{2r}$.

O que acabamos de provar é que o seno do ângulo em A dividido pelo comprimento do lado oposto ao vértice A é igual a $\frac{1}{2r}$. O mesmo argumento se aplica a B ou a C, de modo que essa razão (seno de um ângulo dividido pelo lado oposto) é constante. Essa é a Lei dos Senos.