
MA11 – Números e Funções Reais**Avaliação 3****06 de julho de 2013**

1. (1,5 pontos) Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando adequadamente e em detalhes as suas respostas.

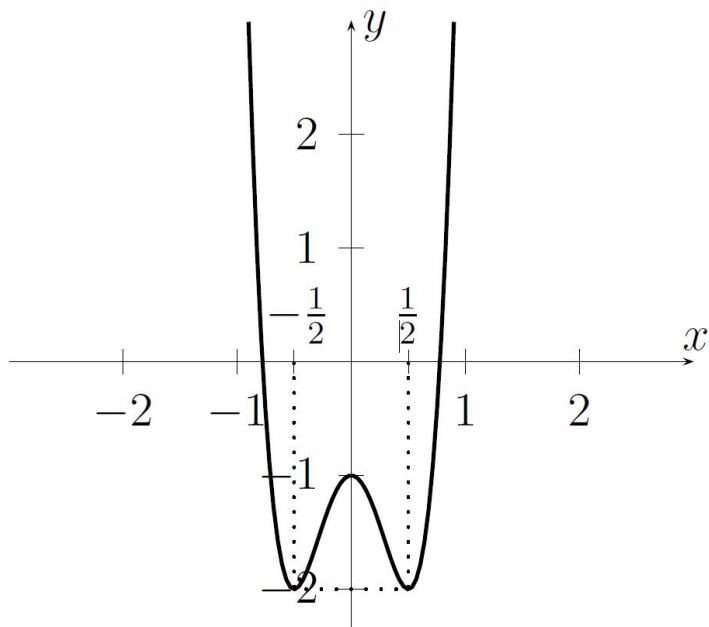
- (a) (0,5 ponto) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções monótonas crescentes, então a função soma $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ é monótona crescente.
- (b) (0,5 ponto) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função limitada superiormente, então f admite um ponto de máximo absoluto.
- (c) (0,5 ponto) Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite um ponto de máximo local, então f admite um ponto de máximo absoluto.

2. (2,0 pontos) Da mesma forma que se expressa um número real no sistema de numeração decimal, é possível expressá-lo em um sistema de numeração posicional qualquer, de base $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta \geq 2$. Dizemos que um número $a \in \mathbb{R}$ está expresso no sistema de base β se ele é escrito na forma:

$$a = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \beta^{-k}$$

em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e os a_k são dígitos entre 0 e $\beta - 1$ (incluindo-os).

- (a) (1,0 ponto) Mostre que, se um número $x \in \mathbb{R}$ é irracional, então x possui representação infinita em toda base β .
- (b) (1,0 ponto) Reciprocamente, mostre que, se um número $x \in \mathbb{R}$ possui representação infinita em toda base β , então x é irracional.
3. (2,0 pontos) Considere a função $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $p_1(x) = (x^2 - 1)^2$. A figura abaixo mostra o gráfico de uma função $p_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ na forma $p_2(x) = c p_1(ax - b) + d$, sendo a , b , c e d constantes reais. Determine a , b , c e d . Justifique sua resposta.



4. (2,0 pontos) Considere as funções $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $u(x) = 2^{\sin(x)}$ e $v(x) = \sin(2^x)$.

- (a) (1,0 ponto) Determine o maior e menor valores atingidos por u e v .
- (b) (1,0 ponto) Esboce os gráficos de u e de v .

5. (2,5 pontos) Considere a função $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2^{1-\frac{1}{x}}$.

- (a) (1,0 ponto) Faça um esboço o gráfico de g .
- (b) (0,75 ponto) Determine todas as soluções reais das equações $g(x) = 2$ e $g(x) = 4$.
- (c) (0,75 ponto) Resolva a inequação $g(x) < 4$, para $x \in \mathbb{R}$.

