Questão 1 [2,0 pt]

Sejam p e q dois números primos distintos.

(a) Mostre que $\sqrt{pq}$ é irracional.

(b) Use o item (a) para provar que $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ é irracional.

Solução

(a) Suponha que $\sqrt{pq}$ seja racional. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, primos entre si, tais que $\sqrt{pq} = \frac{a}{b}$. Temos

$$\begin{array}{rcccccc} pq = \dfrac{a^2}{b^2} & \Rightarrow & a^2 = b^2pq & \Rightarrow & p|a \text{ e } q|a & \Rightarrow \\ p^2|a^2 \text{ e } q^2|a^2 & \Rightarrow & a^2 = p^2q^2r, r \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} & \Rightarrow & p^2q^2r = b^2pq & \Rightarrow \\ pqr = b^2 & \Rightarrow & p|b \text{ e } q|b, & & & \end{array}$$

mas isto é um absurdo, pois a e b são primos entre si.

(b) Suponha que $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ seja racional. Então existem $a, b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, primos entre si, tais que $\sqrt{p}+\sqrt{q} = \frac{a}{b}$. Temos

$$(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow p + 2\sqrt{pq} + q = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \sqrt{pq} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} - p - q\right) \in \mathbb{Q},$$

e isto é um absurdo, pois $\sqrt{pq}$ é irracional pelo item (a).

Questão 2 [2,0 pt]

Sejam X e Y conjuntos arbitrários e $f : X \to Y$ uma função. Prove que, se $A, B \subset X$ então

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

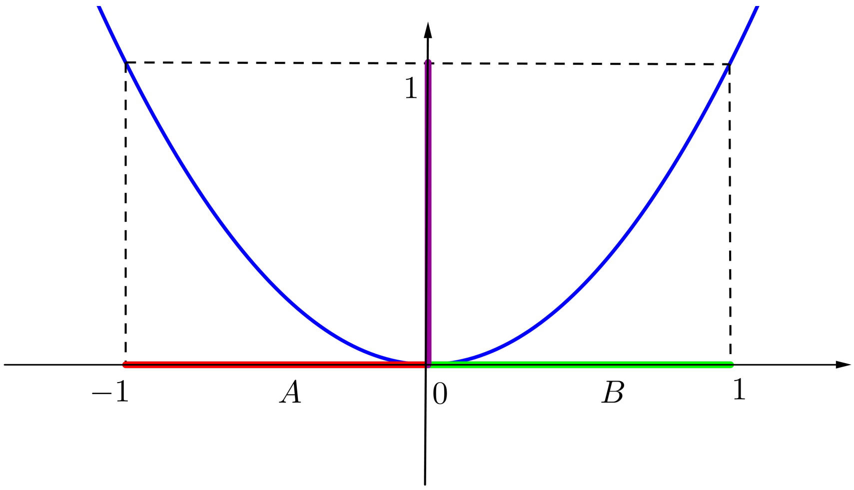
(c) Dê um exemplo para o qual a igualdade de conjuntos no item (b) acima não ocorre.

Solução

(a) Inicialmente, mostraremos que $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Seja $y \in f(A \cup B)$. Então existe $x \in A \cup B$ tal que $f(x) = y$. Se $x \in A$, então $y \in f(A)$. Se $x \in B$, então $f(x) \in f(B)$. Logo, $f(x) \in f(A) \cup f(B)$ e $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$. Reciprocamente, se $y \in f(A) \cup f(B)$, então $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Se $y \in f(A)$, então existe $x \in A$ e, portanto $x \in A \cup B$, tal que $f(x) = y$. Se $y \in f(B)$ então existe $x \in B$ e, portanto, $x \in A \cup B$, tal que $f(x) = y$. Assim $y \in f(A \cup B)$ e $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$. Concluímos então que os dois conjuntos são iguais.

(b) Dado $y \in f(A \cap B)$, existe $x \in A \cap B$ tal que $f(x) = y$. Como $A \cap B \subseteq A$ e $A \cap B \subseteq B$, segue que $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$, isto é, $y \in f(A) \cap f(B)$.

(c) Para obter um contra-exemplo, vamos tentar provar a recíproca do item (b). Dado $y \in f(A) \cap f(B)$, temos que $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$. Desta forma existem $x_1 \in A$ e $x_2 \in B$ tais que $f(x_1) = y = f(x_2)$. *Se f é injetiva*, então $x_1 = x_2 = x \in A \cap B$, de onde segue que $y \in f(A \cap B)$. Assim, vemos que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ se f é injetiva.



Vamos construir um exemplo de uma função não injetiva tal que a inclusão $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ não seja verdadeira. Seja $f(x) = x^2$, $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$. Temos que $A \cap B = \{0\}$, $f(A \cap B) = \{0\}$ e $f(A) \cap f(B) = [0, 1]$, de onde segue que $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$.

Questão 3 **[2,0 pt]**

João tem uma fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$20,00$ cada caixa. Entretanto, percebeu que, cada vez que diminuia R$1,00$ no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Considerando-se apenas valores inteiros de caixas e reais, quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima?

Solução

Como a cada $R\$1,00$ que ele desconta no preço da caixa ele vende 40 caixas a mais, a receita $R(n)$ da fábrica a cada n reais descontados no preço da caixa é

$$R(n) = (300 + 40n)(20 - n) = 6000 + 500n - 40n^2.$$

Como $R(n)$ é uma função quadrática em n com coeficiente líder negativo, vemos que $R(n)$ atinge um ponto de máximo para

$$n = -\frac{500}{2 \cdot (-40)} = 6,25.$$

Por ser uma função quadrática de coeficiente líder negativo, R é decrescente para $n > 6,25$ e crescente para $n < 6,25$. Assim o maior valor de R para n inteiro ocorre no inteiro mais próximo de $6,25$, isto é, para $n = 6$. Portanto, para maximizar os lucros ele deve cobrar $R\$14,00$ por caixa.

Questão 4 [**2,0 pt**]

Uma pessoa tomou 60 mg de uma certa medicação. A bula do remédio informava que a meia-vida do medicamento era de seis horas. Como o paciente não sabia o significado da palavra meia-vida, foi a um site de busca e encontrou a seguinte definição:

Meia-vida: tempo necessário para que uma grandeza (física, biológica) atinja metade de seu valor inicial.

(a) Após 12 horas da ingestão do remédio, qual é a quantidade do remédio ainda presente no organismo?

(b) E após 3 horas?

(c) Quanto tempo após a ingestão a quantidade de remédio no organismo é igual a 20 mg?

Caso julge necessário, use os dados $\sqrt{2} = 1,4$, $\ln 3 = 1,1$ e $\ln 2 = 0,7$.

Solução

(a) Seja $C(t)$ a concentração após t horas. Temos

$$C(6) = \frac{60}{2} = 30\text{mg } C(12) = \frac{C(6)}{2} = 15\text{mg.}$$

(b) Temos $C(6n) = 60 \times 2^{-n},\ n \in \mathbb{N}$. Desta forma, fazendo $6n = t$, temos $C(t) = 60 \times 2^{-t/6}$. Logo

$$C(3) = 60 \times 2^{-3/6} = \frac{60\sqrt{2}}{2} \approx 60 \times 0,7 = 42 \text{ mg.}$$

(c) Temos

$$20 = 2^{-t/6} \times 60 \Rightarrow \frac{1}{3} = 2^{-t/6} \Rightarrow t = 6 \times \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 6 \times \frac{11}{7} \approx 9,4 \text{ horas.}$$

Questão 5 [**2,0 pt**]

(a) Encontre uma expressão para sen $3x$ como um polinômio de coeficientes inteiros em termos de sen x.

(b) Mostre que sen $10°$ é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros e use este fato para concluir que sen $10°$ é irracional.

Solução

(a)

$$\begin{aligned}\text{sen } 3x &= \text{sen}(2x + x) = \text{sen } 2x \cos x + \text{sen } x \cos 2x \\ &= 2\text{sen } x \cos^2 x + \text{sen } x(1 - 2\text{sen}^2\ x) \\ &= 2\text{sen } x(1 - \text{sen}^2\ x) + \text{sen } x - 2\text{sen}^3\ x \\ &= 3\text{sen } x - 4\text{sen}^3\ x \\ &= P(\text{sen } x),\end{aligned}$$

onde $P(u) = 3u - 4u^3$.

(b) Suponhamos que sen $10°$ seja racional. Então existem $p, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, primos entre si, tais que sen $10° = \frac{p}{q}$. Usando o item anterior, vemos que

$$\frac{1}{2} = \text{sen } 30° = 3\text{sen } 10° - 4\text{sen}^3\ 10°$$

e isto implica que sen $10°$ é raiz da equação polinomial

$$8u^3 - 6u + 1 = 0. \tag{1}$$

Se p/q é raiz da equação polinomial (1), então

$$8\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6\left(\frac{p}{q}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow 8p^3 - 6pq^2 + q^3 = 0.$$

Escrevendo a última equação acima das formas

$$8p^3 = 6pq^2 - q^3 \text{ e } q^3 = 6pq^2 - 8p^3,$$

e observando que p e q são primos entre si, vemos que $p|1$ e $q|8$. Assim, as únicas possibilidades para as raizes racionais são $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}$ e $\dfrac{1}{8}$, visto que sen $10°$ é positivo e diferente de 1. Como nenhum desses números é raiz de (1), temos que (1) não tem raízes racionais e, visto que sen $10°$ é raiz de (1), concluímos que sen $10°$ é irracional.