Questão 1.

Uma moeda, com probabilidade $\frac{1}{3}$ de dar cara, é lançada 40 vezes.

(a) Explique por que a probabilidade p_k de se obter k caras nos 40 lançamentos é dada por

$$p_k = C_{40,k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{40-k},$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, 40$.

(b) Calcule para que valores de k tem-se $p_{k+1} > p_k$.

(c) Utilize (b) para obter o valor de k para o qual a probabilidade de se obter k caras é máxima.

UMA SOLUÇÃO

(a) A probabilidade de saírem k caras e $40-k$ coroas em 40 lançamentos, numa ordem específica, é a probabilidade de sair cara elevada à potência k vezes a probabilidade de sair coroa elevada à potência $40-k$. Neste caso,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{40-k}.$$

Mas o número de maneiras (ou ordens) que podem sair as k caras é o número de maneiras de se escolher k elementos entre 40, ou seja, $C_{40,k}$. Por isso a fórmula do enunciado.

(b) Lembramos que

$$C_{40,k} = \frac{40!}{k!(40-k)!}.$$

Então $p_{k+1} > p_k$ se, e somente se,

$$\frac{40!}{(k+1)!(40-k-1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{40-k-1} > \frac{40!}{k!(40-k)!}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{40-k}.$$

Ou seja, se, e somente se,

$$\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{3} > \frac{1}{40-k}\cdot\frac{2}{3},$$

cancelando os fatores comuns nos dois lados. Portanto $p_{k+1} > p_k$ se, e somente se, $40-k > 2k+2$, isto é, $k < \frac{38}{3}$. Como k é inteiro, isto é equivalente a $k \leq 12$.

(c) De (b) vale

$$p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_{12} < p_{13}.$$

Vale, também,

$$p_{13} \geq p_{14} \geq \ldots \geq p_{40},$$

embora valham, de fato, as desigualdades estritas, se for aplicado raciocínio análogo àquele feito em (b). O valor máximo, ocorre, portanto, em $k = 13$.

Questão 2.

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = 2n^2 - 15n$.

(a) Determine o décimo termo da progressão.

(b) Encontre o primeiro termo positivo da progressão.

UMA SOLUÇÃO

(a) O décimo termo é $S_{10} - S_9$, isto é,

$$(2 \cdot 10^2 - 15 \cdot 10) - (2 \cdot 9^2 - 15 \cdot 9) = 23\,.$$

(b) Queremos saber para quais valores de n o n-ésimo termo, isto é, a expressão $S_n - S_{n-1}$, é maior do que zero. Temos

$$(2n^2 - 15n) - (2(n-1)^2 - 15(n-1)) = 4n - 17\,,$$

logo o primeiro termo positivo ocorre para o primeiro n tal que $4n - 17 > 0$, isto é, para $n = 5$.

Questão 3.

Um comerciante, para quem o dinheiro vale 3% ao mês, oferece determinado produto por 3 prestações mensais iguais a R$ 100,00, a primeira paga um mês após a compra.

(a) Que valor o comerciante deve cobrar por este produto, no caso de pagamento à vista?

(b) Se um consumidor desejar pagar o produto em três prestações mensais iguais, sendo a primeira paga no ato da compra, qual deve ser o valor das parcelas?

Utilize, se desejar, os seguintes valores para as potências de 1,03: $1,03^2 = 1,0609$, $1,03^3 = 1,0927$, $1,03^{-1} = 0,9709$, $1,03^{-2} = 0,9426$, $1,03^{-3} = 0,9151$.

UMA SOLUÇÃO

(a) Trazendo os valores das prestações a valor presente e somando, obtemos o valor para o pagamento à vista:

$$\begin{aligned}
\frac{100}{1,03} + \frac{100}{1,03^2} + \frac{100}{1,03^3} &= \frac{100}{1,03}(1 + 1,03^{-1} + 1,03^{-2}) \\
&= \frac{100}{1,03} \cdot \frac{1 - 1,03^{-3}}{1 - 1,03^{-1}} \\
&\simeq 100 \cdot \frac{1 - 0,9151}{0,03} = 100 \cdot \frac{8,49}{3} = 283\,.
\end{aligned}$$

O resultado pode ser um pouco diferente dependendo de como são usados os arredondamentos.

(b) Não é preciso saber o valor à vista. Basta trazer em 1 mês cada uma das prestações de 100 reais. Ou seja, cada uma deve ser de $100 \cdot 1,03^{-1}$, que é aproximadamente igual a 97,09 reais.

Questão 4.

(a) Mostre, por indução finita, que
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}$$
para todo número natural $n \geq 2$.

(b) Use este fato para explicar por que a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ cresce sem limite.

UMA SOLUÇÃO

(a) Primeiro vejamos que a desigualdade vale para $n = 2$. O lado esquerdo, neste caso, é $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, que é igual a $\frac{7}{12}$.

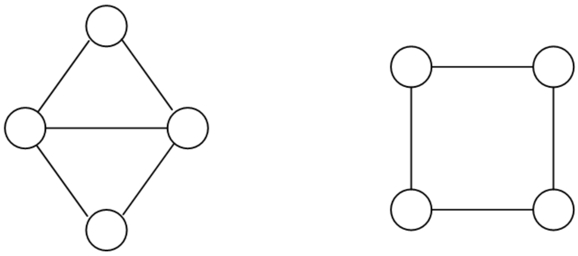
Agora suponhamos que a desigualdade valha para um certo $n \geq 2$. Iremos mostrar que a correspondente desigualdade também vale para $n + 1$. Isto é, supondo que vale
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \frac{7}{12}$$
(hipótese de indução), mostraremos que vale
$$\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \ldots + \frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{7}{12}\,.$$
Ora, mas o lado esquerdo pode ser escrito como
$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}\,.$$
Pela hipótese de indução, a soma entre parênteses é maior do que ou igual a $\frac{7}{12}$. Então basta mostrar que
$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \geq 0\,.$$
Mas isso é verdade porque
$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} > \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{n+1}\,.$$

(b) A soma mencionada pode ser agrupada assim:
$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$
Cada agrupamento entre parênteses é da forma $\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$, com $n = 2, 4, 8, \ldots$, isto é, $n = 2^k$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$. E cada um deles é maior do que ou igual a $\frac{7}{12}$, conforme demonstrado em (a). Assim, a soma parcial até o termo $2 \cdot 2^k$ é maior do que ou igual a $1 + \frac{1}{2} + k \cdot \frac{7}{12}$.

Como a sequência das somas parciais é crescente e para os valores de $n = 2^{k+1}$ a soma parcial é maior do que $\frac{7k}{12}$, então para qualquer valor real $M > 0$ existirá um n tal que a soma parcial até o n-ésimo termo supera o valor M. Isso mostra que a série cresce sem limite.

Questão 5.

Cada bolinha nas figuras abaixo deve ser colorida com uma das cores azul, branca, vermelha ou preta, de modo que as bolinhas ligadas por um segmento tenham cores diferentes.



(a) De quantos modos se pode colorir a figura da esquerda?

(b) De quantos modos se pode colorir a figura da direita?

UMA SOLUÇÃO

(a) Na figura da esquerda, há 4 cores possíveis para a bolinha na posição mais alta. Uma vez fixada essa cor, a bolinha na altura intermediária à esquerda tem 3 possibilidades, e, fixada esta, a da direita tem duas possibilidades. Para a bolinha inferior sobram duas possibilidades, ou a cor da bolinha superior ou a cor que não entrou em nenhuma das 3 bolinhas mais acima. Então são $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$ maneiras.

(b) A figura da direita poderia ser desenhada como a da esquerda, mas sem a ligação entre as duas bolinhas que estão na posição intermediária. Se essas duas bolinhas têm a mesma cor, então são 4 cores para a bolinha superior, 3 para as intermediárias iguais, e 3 para a inferior (a inferior só não pode ser igual às intermediárias iguais). Isso dá $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$. Se as bolinhas intermediárias têm cores diferentes aí caímos no caso anterior, onde encontramos 48 maneiras. Então o número total de maneiras é $36 + 48 = 84$.