
MA12 – Matemática Discreta**Avaliação - AV 3 - MA 12****13 de julho de 2013**

1. (2,0) Seja (a_n) uma progressão aritmética e seja (b_n) a sequência definida por

$$b_n = a_n + a_{n+1}, \quad \forall n \geq 1$$

- a) (0,5) Mostre que (b_n) também é uma progressão aritmética.

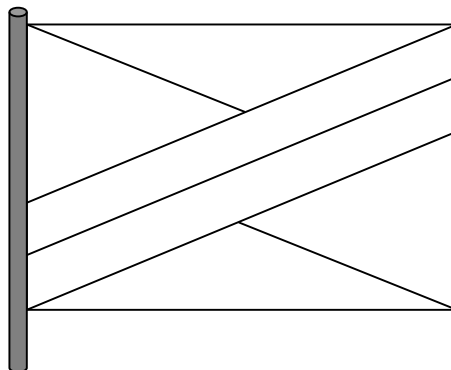
b) (1,5) Suponha que a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) seja igual a $2n^2 + 5n$, para todo natural $n \geq 1$. Obtenha uma expressão para a soma dos n primeiros termos de (b_n) .

2. (2,0) Seja (a_n) uma sequência tal que $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ e $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, para todo natural $n \geq 1$. Mostre, por indução finita, que

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2n} = a_{2n+1} - 2,$$

para todo $n \geq 1$.

3. (2,0) Considere a bandeira da figura abaixo, formada por seis regiões. Para colori-la, há lápis de cor de quatro cores diferentes.



a) (0,5) De quantos modos ela pode ser colorida de modo que regiões adjacentes tenham cores diferentes?

b) (1,5) Resolva o item a), supondo agora que todas as quatro cores sejam utilizadas para pintar cada bandeira.

4. (2,0) João precisa comprar uma peça para seu carro, com o qual ele espera ficar por mais 3 anos. Ele pode comprar, por R\$ 1400,00, uma peça original, que vai durar todo este período, ou, por R\$ 500,00, uma peça alternativa, que dura apenas 1 ano. Suponha que o valor do dinheiro seja de 10% ao ano.

a) (1,0) Mostre que, apesar do desembolso total com a peça alternativa ser maior, ela é a mais vantajosa para João.

b) (1,0) João acha que pode conseguir um desconto na peça original. A partir de que valor vale a pena ele optar por ela?

5. (2,0) As faces de um dado honesto são numeradas de 1 a 3 (cada número aparece duas vezes). Seja p_n a probabilidade de que a soma das faces obtidas em n lançamentos seja par.

a) (1,0) Explique porque a sequência p_n satisfaz a recorrência $p_{n+1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot p_n$. Qual é o valor de p_1 ?

b) (1,0) Resolva a equação de recorrência em a) para obter uma expressão para p_n .

[Sugestão: determine uma constante k tal que $p_n = k$ seja uma solução da recorrência e faça a substituição $p_n = y_n + k$, para obter uma recorrência homogênea ou você também pode usar o método geral visto no curso para resolver recorrências lineares não homogêneas.]