

Questão 1.

(1,0) (a) Descreva os números naturais que possuem 15 divisores naturais.

(1,0) (b) Determine o menor número natural com 15 divisores.

Questão 2.

(2,0) Determine a maior potência de 15 que divide $150!$

Questão 3.

(2,0) Quando um macaco sobe uma escada de dois em dois degraus, sobra um degrau, quando sobe de três em três degraus, sobram dois degraus e quando sobe de cinco em cinco degraus, sobram três degraus. Quantos degraus possui a escada, sabendo que o número de degraus está entre 150 e 200 ?

Questão 4.

(1,0) (a) Determine os elementos invertíveis de \mathbb{Z}_{24} e mostre que cada um é o seu próprio inverso.

(0,5) (b) Calcule a soma de todos os elementos invertíveis de \mathbb{Z}_{24} .

(0,5) (c) Calcule o produto de todos os elementos invertíveis de \mathbb{Z}_{24} .

Questão 5.

(1,0) (a) Seja dado um número natural $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ decomposto em fatores irredutíveis. Seja n um número natural tal que $\phi(p_i^{\alpha_i})$ divide n , para todo $i = 1, \dots, r$. Mostre que m divide $a^n - 1$ para todo número natural a primo com m .

(1,0) (b) Mostre que $a^{12} - 1$ é divisível por 4095 sempre que $(a, 1365) = 1$.