Questão 1 [2,0 pt]

a) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $a - b$ divide $a^n - b^n$.

b) Mostre que o número $43^{101} + 23^{101}$ é divisível por 66.

Solução

(a) Vamos provar por indução sobre n.

A afirmação é verdadeira para $n = 1$, pois $a - b$ divide $a - b$.

Suponhamos, agora, que $a - b$ divide $a^n - b^n$ (hipótese de indução). Temos que,

$$a^{n+1} - b^{n+1} = aa^n - bb^n = aa^n - ba^n + ba^n - bb^n = a^n(a - b) + b(a^n - b^n).$$

Como $a - b \mid a - b$ e, por hipótese, $a - b \mid a^n - b^n$, decorre da igualdade acima que $a - b \mid a^{n+1} - b^{n+1}$.

Portanto, $a - b$ divide $a^n - b^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Aplicando o resultado do item (a), tomando $a = 43$, $b = -23$ e $n = 101$, obtemos que

$$43 - (-23) \mid (43)^{101} - (-23)^{101}.$$

Portanto,

$$66 \mid 43^{101} + 23^{101}.$$

Questão 2 [2,0 pt]

Sejam a, b, p inteiros tais que p é primo, $(a, p^2) = p$ e $(b, p^3) = p^2$. Determine:

(a) (ab, p^4).

(b) $(a + b, p^3)$.

Solução

Suponhamos p primo, $(a, p^2) = p$ e $(b, p^3) = p^2$. Segue que $p \mid a, p^2 \nmid a, p^2 \mid b$ e $p^3 \nmid b$ e daí, $a = pk$ e $b = p^2 t$, onde $p \nmid k$ e $p \nmid t$.

Considerando ab e $a + b$, temos $ab = p^3 kt$ e $a + b = p(k + pt)$. Como p é primo, $p \nmid k$ e $p \nmid t$, concluimos que $p \nmid kt$ e $p \nmid k + pt$. Portanto, $(ab, p^4) = p^3$ e $(a + b, p^3) = p$.

Questão 3 [2,0 pt]

(a) Mostre, para todo $n \in \mathbb{N}$, que $10^{2n} \equiv 1 \mod 11$ e $10^{2n+1} \equiv -1 \mod 11$.

(b) Seja $a = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ um número natural, representado no sistema decimal. Prove o seguinte critério de divisibilidade por 11: *uma condição necessária e suficiente para que a seja divisível por 11 é que* $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ *seja divisível por 11.*

Solução

(a) Temos que $10 \equiv -1 \mod 11$ e daí, $(10)^{2n} \equiv (-1)^{2n} \mod 11$ e $(10)^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \mod 11$, para todo n natural. Portanto, $10^{2n} \equiv 1 \mod 11$ e $10^{2n+1} \equiv -1 \mod 11$, para todo n natural.

(b) Seja $a = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0$ um número natural, representado no sistema decimal. Temos, então, que $a = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0 = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. Agora, usando o item (a), obtemos que $a \equiv \cdots a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \mod 11$ e daí, $a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) \mod 11$. Portanto, a é divisível por 11 se, e somente se, $(a_0 + a_2 + a_4 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ é divisível por 11.

Questão 4 [2,0 pt]

Dispomos de uma quantia em reais maior do que 1000 e menor do que 2000. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra 1 real; se a distribuirmos entre 10 pessoas, sobram 2 reais e se a distribuirmos entre 9 pessoas sobram 4 reais. De quantos reais dispomos?

Solução

Representamos por N a quantia, em reais, disponível, onde $1000 < N < 2000$. Sabemos que N é uma solução do seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} x \equiv & 1 \mod 11 \\ x \equiv & 2 \mod 10 \\ x \equiv & 4 \mod 9 \end{cases}.$$

Como $(11, 10) = (11, 9) = (10, 9) = 1$ usaremos o Teorema Chinês dos Restos para resolvê-lo. Neste caso, $c_1 = 1, c_2 = 2$, $c_3 = 4$, $M = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990, M_1 = 90, M_2 = 99$ e $M_3 = 110$.

Por outro lado, $y_1 = 6, y_2 = 9$ e $y_3 = 5$ são soluções, respectivamente, das congruências $90y_1 \equiv 1 \mod 11$, $99y_2 \equiv 1 \mod 10$ e $110y_3 \equiv 1 \mod 9$. Portanto,

$$x \equiv M_1 y_1 c_1 + M_2 y_2 c_2 + M_3 y_3 c_3 \mod 990.$$

Assim , $x \equiv 90 \cdot 6 \cdot 1 + 99 \cdot 9 \cdot 2 + 110 \cdot 5 \cdot 4 \equiv 562 \mod 990$. A solução geral do sistema é dada por $x = 562 + 990t$, onde $t \in \mathbb{Z}$, com uma única solução natural N, $1000 < N < 2000$, obtida quando $t = 1$. Portanto, a resposta para o problema é $N = 1552$.

Questão 5 [2,0 pt]

Mostre que a congruência $x^3 \equiv 5 \mod 9$ não possui soluções inteiras. Conclua que a equação $x^3 - 117\,y^3 = 5$ não possui soluções inteiras.

Solução

Seja x um número inteiro. Considerando a congruência módulo 9, temos as seguintes possibilidades: $x \equiv 0$, $x \equiv 1$, $x \equiv 2$, $x \equiv 3$, $x \equiv 4$, $x \equiv 5$, $x \equiv 6$, $x \equiv 7$ e $x \equiv 8$.

Agora, calculando x^3, módulo 9, seguindo a mesma ordem acima, obtemos $x^3 \equiv 0$, $x^3 \equiv 1$, $x^3 \equiv 8$, $x^3 \equiv 0$, $x^3 \equiv 1$, $x^3 \equiv 8$, $x^3 \equiv 0$, $x^3 \equiv 1$ e $x^3 \equiv 8$. Portanto, $x^3 \equiv 5 \mod 9$ não possui soluções inteiras.

Suponhamos, agora, x e y números inteiros tais que $x^3 - 117y^3 = 5$. Como $117 = 9 \cdot 13 \equiv 0 \mod 9$, obtemos $x^3 - 117y^3 \equiv x^3 \mod 9$ e daí, $x^3 \equiv 5 \mod 9$, o que não é possível.

Portanto, a equação $x^3 - 117y^3 = 5$ não possui soluções inteiras.