



SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

PROFMAT

3ª Avaliação Nacional de Aritmética - MA14 - 21/12/2013

Nome:-----

Questão 1. (pontuação: 2)

(1,0) a) Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental da Aritmética.

(1,0) b) Encontre os possíveis valores de $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que o número $9^m 10^n$ tenha 243 divisores.

Questão 2. (pontuação: 2)

(1,0) a) Enuncie e demonstre o Teorema Chinês dos Restos.

(1,0) b) Dispomos de uma quantia em reais menor do que R\$ 3 000,00. Se distribuirmos essa quantia entre 11 pessoas, sobra R\$ 1,00. Se a distribuirmos entre 12 pessoas, sobram R\$ 2,00 e se a distribuirmos entre 13 pessoas, sobram R\$ 3,00. De quantos reais dispomos?

Questão 3. (pontuação: 2)

Numa criação de galinhas e coelhos, contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?

Questão 4. (pontuação: 2)

Mostre que $n^7 - n$ é divisível por 7 para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Questão 5. (pontuação: 2)

(1,0) a) Seja u_n o n -ésimo termo da sequência de Fibonacci. Mostre que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}$$

e conclua que $u_{n-1}u_{n+1} = u_n^2 + (-1)^n$.

(1,0) b) Prove a fórmula de Leibniz

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=n} \frac{n!}{i_1!i_2!\dots i_m!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \dots a_m^{i_m}, \quad a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}.$$

Obs.: Se achar necessário, para facilitar, assuma a validade da fórmula do Binômio de Newton.