Terceira Prova de Aritmética - MA14

2012/2 semestre

NOME: ____

Questão 1 *(valor total: 2 pontos)*

(valor: 0,5) a) Mostre que a soma dos quadrados de dois números ímpares nunca é um quadrado.

(valor: 0,5) b) Mostre que todo quadrado perfeito é da forma $5k$, $5k+1$ ou $5k+4$.

(valor: 1,0) c) Mostre que se três inteiros verificam $a^2 = b^2 + c^2$, então b ou c é par e um dos três números a, b ou c é múltiplo de 5.

Questão 2 *(valor: 2 pontos)*

Um grupo de 30 pessoas formado por homens, mulheres e crianças, ganhou numa loteria um prêmio de R\$ $30.000,00$ que foi dividido entre elas da seguinte forma: Cada homem recebeu R\$ $2.000,00$, cada mulher recebeu R\$ $500,00$ e cada criança recebeu R\$ $100,00$. Qual é a quantidade de homens, mulheres e crianças que havia no grupo?

Questão 3 *(valor: 2 pontos)*

Mostre que

$$2^{1000} | 1001 \times 1002 \times \cdots \times 2000,$$

mas que

$$2^{1001} \nmid 1001 \times 1002 \times \cdots \times 2000.$$

Questão 4 *(valor: 2 pontos)*

Ache o resto da divisão de $1^5 + 2^5 + \cdots + 183^5$ por 5.

Questão 5 *(valor: 2 pontos)*

a) Ache o menor número natural M que é termo comum às seguintes progressões aritméticas:

$$a_n = 5n + 1, \quad b_n = 7n + 3, \quad c_n = 9n + 5,$$

ou seja, determine o menor número natural M para o qual existem r, s e t tais que $a_r = b_s = c_t = M$.

b) Encontre os valores dos índices r, s e t tais que $a_r = b_s = c_t = M$.