Sociedade Brasileira de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

MA12 – Matemática Discreta
Avaliação 1 - MA 12
27 de abril de 2013

1. *(valor 3,0)*

Paulo economizou durante muitos anos e tem, hoje, $R\$$ 500.000,00 aplicados em um investimento que rende juros de 1% ao mês. A partir do próximo mês, ele pretende fazer uma retirada mensal de $R\$$ 1.000,00.

a) Seja s_n o saldo que resta da aplicação, após fazer a n-ésima retirada. Exprima s_{n+1} em termos de s_n. Dê também a condição inicial da recorrência obtida. *(pontuação parcial 0,5)*

b) Obtenha uma expressão para s_n em função de n. (*pontuação parcial 1,5)*

c) Qual é a retirada mensal máxima que Paulo pode fazer de modo que o saldo da aplicação nunca se torne negativo? *(pontuação parcial 1,0)*

2. *(valor 2,5)*

a) Para que valores de b existe uma progressão geométrica para a qual a soma dos n primeiros termos é igual a $3^{n+1} + b$, para todo n natural? *(pontuação parcial 1,0)*

b) Quais são o primeiro termo e a razão dessa progressão? *(pontuação parcial 1,5)*

3. *(valor 2,0)*

Prove, por indução finita, que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{n}{2},$$

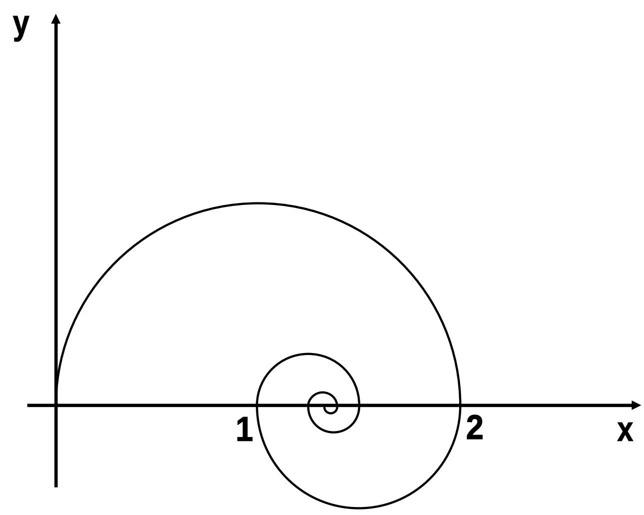
para todo n natural.

4. *(valor 1,5)*

Na figura abaixo temos uma espiral formada por infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, determine:

a) o comprimento total da espiral. *(pontuação parcial 0,75)*

b) a abscissa do ponto P assintótico da espiral. *(pontuação parcial 0,75)*



5. *(valor 1,0)*

a) Se (a_n) é uma progressão geométrica de termos positivos, prove que (b_n) definida por $b_n = log\, a_n$ é uma progressão aritmética. *(pontuação parcial 0,5)*

b) Se (a_n) é uma progressão aritmética, prove que (b_n) definida por $b_n = e^{a_n}$ é uma progressão geométrica. *(pontuação parcial 0,5)*