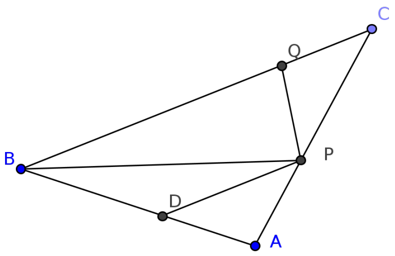
PROFMAT **MA13 – Geometria – AVF – 2014** SBM

Questão 1 [2,0 pt]

Na figura, $AB \equiv AC$ e a bissetriz interna traçada de B intersecta o lado AC em P de forma que $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{BC}$. Os pontos Q e D são tomados de forma que $BQ \equiv BP$ e PD é paralelo a BC.

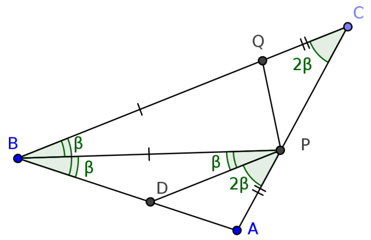


(a) Mostre que os triângulos CQP e PAD são congruentes.

(b) Determine as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

Solução

(a) Para simplificar a notação, denote $\angle(CBP) = \beta$. Como BP é bissetriz de $A\hat{B}C$, temos também $\angle(ABP) = \beta$. E, como $AB \equiv AC$, temos $\angle(ACB) = \angle(ABC) = 2\beta$.



Como $\overline{BQ} + \overline{QC} = \overline{BC} = \overline{BP} + \overline{PA}$ e $\overline{BQ} = \overline{BP}$, temos $\overline{QC} = \overline{AP}$.

Como BC e DP são paralelas, temos

$$\angle(BPD) = \angle(CBP) = \beta,$$
$$\angle(APD) = \angle(ACB) = 2\beta.$$

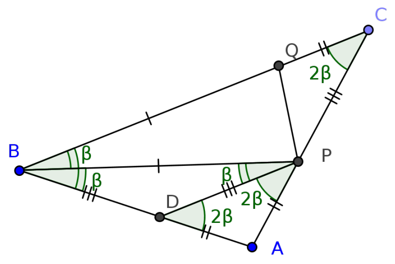
Como $A\hat{D}P$ é ângul oexterno do triângulo BDP, temos

$$\angle(ADP) = \angle(BPD) + \angle(DBP) = 2\beta.$$

Mas então o triângulo ADP será isósceles, e, portanto, $AD \equiv AP$. Como $AB \equiv AC$, temos que $BD \equiv PC$, e, como BDP é isósceles, temos $DP \equiv BD \equiv CP$.

Pelo caso LAL, temos então que os triângulos PAD e CQP são congruentes.

(b) Pela congruência de PAD e CQP, temos $\angle(QPC) = \angle(ADP) = 2\beta$.



Como PQC é isósceles, $\angle(QPB) = \angle(PQB)$, e como $\angle(QPB) + \angle(PQB) + \beta = 180°$, temos $\angle(QPB) = 90° - \frac{\beta}{2}$. Assim, considerando todos os ângulos da figura que têm vértice em P, temos

$$2\beta + \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \beta + 2\beta = 180°,$$

logo

$$\frac{9}{2}\beta = 90° \therefore \beta = 20°.$$

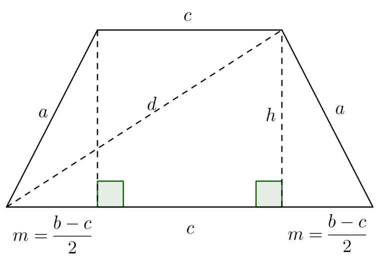
com isso, os ângulos internos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ medem $2\beta = 40°$, e $\hat{A}$ mede $180° - 2 \cdot 40° = 100°$.

Questão 2 **[2,0 pt]**

Prove que se um trapézio isósceles tem os lados congruentes com comprimento a, os lados paralelos com comprimentos b e c, e diagonais com comprimento d, então $d^2 = a^2 + bc$.

Solução

Vamos supor, sem perda de generalidade, $b > c$. Denotemos por h a altura do trapézio e por m a projeção ortogonal de um dos lados congruentes sobre a base maior. Note que $m = \frac{b-c}{2}$.



Assim, considerando um triângulo retângulo cujos catetos são m e h, e cuja hipotenusa é um lado a, temos, pelo Teorema de Pitágoras,

$$m^2 + h^2 = a^2,$$

logo

$$\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + h^2 = a^2,$$

que nos dá

$$b^2 + c^2 - 2bc + 4h^2 = 4a^2.$$

Considerando agora um triângulo retângulo cujos catetos medem $c + m$ e h, e de hipotenusa d, temos

$$(c+m)^2 + h^2 = d^2,$$

logo

$$\left(c + \frac{b-c}{2}\right)^2 + h^2 = d^2,$$

e então

$$\left(\frac{b+c}{2}\right) + h^2 = d^2,$$

que implica

$$b^2 + c^2 + 2bc + 4h^2 = 4d^2.$$

Subtraindo as duas equações obtidas, temos

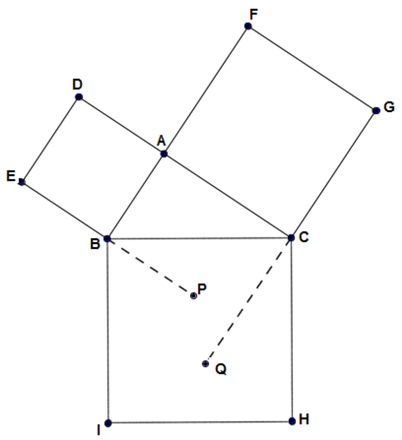
$$4bc = 4d^2 - 4a^2,$$

logo,

$$d^2 = a^2 + bc.$$

Questão 3 **[2,0 pt]**

Na figura abaixo o triângulo ABC é retângulo em A. Os quadriláteros $ABED$ e $ACGF$ são quadrados. Estendemos EB até P, de tal modo que $EB \equiv BP$. Estendemos GC até Q, de tal modo que $GC \equiv CQ$.



(a) Prove que o triângulo ABC é congruente ao triângulo PBI e que o triângulo BQC é congruente ao triângulo HPI.

(b) Prove que a área do triângulo BPC é a metade da área do quadrado $ABED$.

(c) Prove que a área do triângulo BQC é a metade da área do quadrado $ACGF$.

(d) Demonstre que $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ (Teorema de Pitágoras).

Solução

(a) Por simplicidade, vamos denotar $\angle(ABC) = \beta$ e $\angle(ACB) = \gamma$. Note que $\beta + \gamma = 90°$.

Como $\angle(ABC) = \beta$ e $A\hat{B}C$ é ângulo reto, $\angle(PBC) = 90° - \beta = \gamma$. E, como $C\hat{B}I$ é ângulo reto, $\angle(PBI) = 90° - \gamma = \beta$.

Assim, temos $PB \equiv EB \equiv AB$, $BI \equiv BC$ e $\angle(PBI) = \angle(ABC)$, logo, pelo caso LAL, os triângulos ABC e PBI são congruentes.

Essa congruência implica que $\angle(PIB) = \angle(ACB) = \gamma$, logo $\angle(PIH) = 90 - \gamma = \beta$, e que $PI \equiv AC$.

Temos $\angle(BCQ) = 90° - \gamma$, logo, $\angle(BCQ) = \beta$.

Note ainda que $QC \equiv CG \equiv AC$.

Temos então que

$$\angle(PIH) = \beta = \angle(BCQ),$$
$$PI \equiv AC \equiv QC,$$
$$IH \equiv CB.$$

Com isso os triângulos PBI e BQP serão congruentes pelo caso LAL.

(b) Como AC é paralelo a BP, temos

$$\text{Área}(BPC) = \text{Área}(BPA) = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{\overline{AB}^2}{2},$$

que é a metade da área $\overline{AB}^2$ do quadrado $ABED$.

(c) Como AB é paralelo a QC, temos

$$\text{Área}(BQC) = \text{Área}(AQC) = \frac{\overline{QC} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{\overline{AC}^2}{2},$$

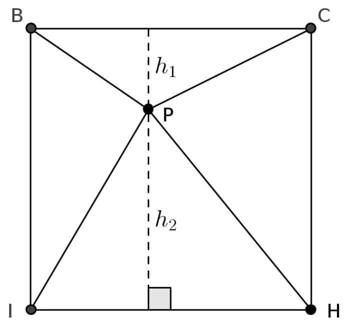
que é a metade da área $\overline{AC}^2$ do quadrado $ACGF$.

(d) Pelos itens anteriores, já sabemos que

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\text{Área}(BPC) + 2\text{Área}(BQC).$$

Portanto, resta apenas mostrar que $2\text{Área}(BPC) + 2\text{Área}(BQC) = \overline{BC}^2$

Pelo item (a), temos $\text{Área}(BQC) = \text{Área}(PIH)$, sendo h_1 e h_2 as alturas dos triângulos BPC e PIH, relativas às bases BC e IH, respectivamente (veja figura), temos $h_1 + h_2 = \overline{CH} = \overline{BC}$, logo



$$\begin{aligned}
2\text{Área}(BPC) + 2\text{Área}(BQC) &= 2\text{Área}(BPC) + 2\text{Área}(PIH) \\
&= 2 \cdot \frac{\overline{BC} \cdot h_1}{2} + 2 \cdot \frac{\overline{IH} \cdot h_2}{2} \\
&= \overline{BC} \cdot h_1 + \overline{BC} \cdot h_2 \\
&= (h_1 + h_2)\overline{BC} \\
&= \overline{BC}^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2\text{Área}(BPC) + 2\text{Área}(BQC) = \overline{BC}^2.$$

Questão 4 **[2,0 pt]**

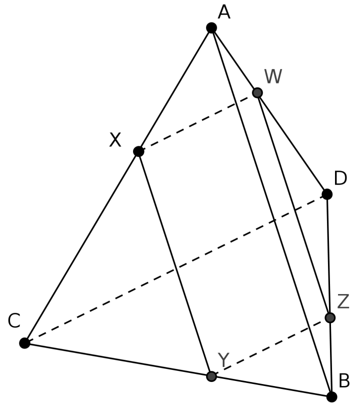
Um tetraedro regular é cortado por um plano paralelo a duas arestas, de tal forma que a seção seja um paralelogramo.

(a) Descreva a posição do plano de forma que a seção seja um losango e calcule, em função de a, o lado desse losango.

(b) Determine, em função da medida a da aresta, a medida do lado do paralelogramo de área máxima assim obtido.

Solução

(a) Para facilitar a escrita, seja $ABCD$ o tetraedro e consideremos o plano paralelo às arestas AB e CD. Sejam ainda X, Y, Z e W as interseções do plano com as arestas AB, BC, BD e AD, respectivamente.



O segmento XY é a interseção do plano paralelo a AB com a face ABC, contida em um plano que também contém AB. Ora, interseção de dois planos paralelos a uma reta dada (ou que contenham esta reta) será uma reta paralela à reta dada, portanto, o segmento XY é paralelo à aresta AB. Da mesma forma, o segmento ZW será paralelo a AB, e YZ e XW paralelos a CD.

Como ABC é um triângulo equilátero, e XY é paralelo a AB, temos que XCY é equilátero, implicando $XY \equiv CX$. Da mesma forma, como ACD é equilátero e XW é paralelo a CD, temos que $XW \equiv AX$.

Para que $XYZW$ seja um losango, é necessário que $XY \equiv XW$, logo, que

$$CX \equiv XY \equiv XW \equiv AX.$$

Assim, X será o ponto médio de AC. Com isso, como $CY \equiv CX$ e $BC \equiv AC$, Y também será ponto médio de BC. Da mesma forma, Z e W são pontos médios de BD e AD, respectivamente.

(b) Na notação do item anterior, sendo $\overline{XC} = x$, teremos $\overline{XY} = x$ e $\overline{XW} = \overline{AX} = a - x$. As retas reversas suporte de AB e CD são ortogonais, logo, sendo XY e XW paralelas a estas retas, respectivamente, XY e XW são perpendiculares. Assim, a área do paralelogramo $XYZW$ é dada por

$$\text{Área}(XYZW) = \overline{XC} \cdot \overline{XW} = x(a-x) = x^2 + ax.$$

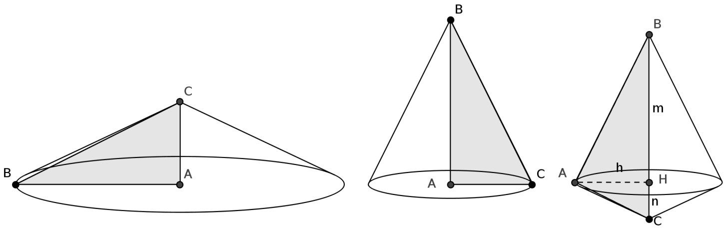
O valor máximo para esta expressão ocorre quando $x = \frac{a}{2}$. Portanto, o paralelogramo de área máxima ocorre quando seus lados medem $\frac{a}{2}$.

Questão 5 **[2,0 pt]**

Sejam x, y e z os volumes gerados por um triângulo ABC, retângulo em A, girando sucessivamente em torno de seus lados BC, CA e AB. Prove que

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

Solução



Quando giramos em torno do cateto CA, temos um cone circular reto cuja base é o círculo de raio $\overline{AB}$ e de altura $\overline{CA}$. Assim, o volume é

$$y = \frac{\pi\overline{AB}^2 \cdot \overline{CA}}{3}.$$

Quando giramos em torno do cateto AB, temos um cone circular reto cuja base é o círculo de raio $\overline{CA}$ e de altura $\overline{AB}$. Assim, o volume é

$$z = \frac{\pi\overline{CA}^2 \cdot \overline{AB}}{3}.$$

Girando em torno da hipotenusa BC, obtemos dois cones. A base de ambos será o círculo de raio igual à altura h do triângulo ABC, relativa ao vértice A. As alturas dos cones serão as medidas m e n das projeções ortogonais de AB e AC sobre a hipotenusa BC. Assim, o volume do sólido dado pelos dois cones é

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi h^2 \cdot m}{3} + \frac{\pi h^2 \cdot n}{3} \\ &= \frac{\pi h^2 (m+n)}{3} \\ &= \frac{\pi h^2 \cdot \overline{BC}}{3} \end{aligned}$$

Como $h \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{CA}$, temos $h = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CA}}{\overline{BC}}$, logo

$$x = \frac{\pi\overline{AB}^2 \cdot \overline{CA}^2}{3\overline{BC}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= \frac{9}{\pi^2\overline{AB}^4 \cdot \overline{CA}^2} + \frac{9}{\pi^2\overline{CA}^4 \cdot \overline{AB}^2} \\ &= \frac{9\overline{CA}^2 + 9\overline{AB}^2}{\pi^2\overline{AB}^4 \cdot \overline{CA}^4} \\ &= \frac{9\overline{BC}^2}{\pi^2\overline{AB}^4 \cdot \overline{CA}^4} \\ &= \left(\frac{3\overline{BC}}{\pi\overline{AB}^2 \cdot \overline{CA}^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$