Questão 1 [2,0 pt]

Determine $m \in \mathbb{N}$ de modo que o número $20 \cdot 21^m$ tenha exatamente 96 divisores positivos.

Solução

Denotando por $D(n)$ o número de divisores positivos do número natural n, se $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ é a decomposição de n em fatores primos distintos, sabemos que

$$D(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

Como $20 \cdot 21^m = 2^2 \cdot 5(3 \cdot 7)^m = 2^2 \cdot 3^m \cdot 5 \cdot 7^m$ e $D(20 \cdot 21^m) = 96$, obtemos

$$(2+1)(m+1)(1+1)(m+1) = 96 \Longleftrightarrow (m+1)^2 = 16,$$

cujas raízes são -5 e 3.

Portanto, como m é natural, a resposta é $m = 3$.

Questão 2 [2,0 pt]

Mostre que os números $(10201)_b$ e $(10101)_b$, representados numa base $b > 2$, são compostos.

Solução

Temos que, $(10201)_b = b^4 + 2b^2 + 1 = (b^2+1)^2$, onde $b^2 + 1 \neq 1$, portanto um número composto.

Considerando agora $(10101)_b = b^4 + b^2 + 1$, observamos que

$$b^4 + b^2 + 1 = b^4 + 2b^2 - b^2 + 1 = (b^2+1)^2 - b^2 = (b^2 + 1 - b)(b^2 + 1 + b),$$

onde os fatores são diferentes de 1.

Portanto, $(10101)_b$ também é um número composto.

Questão 3 [2,0 pt]

A secretaria de educação de um certo município dispõe de 5000 reais para gastar na compra de livros: o livro Tipo A, que custa 26 reais a unidade, e o livro Tipo B, que custa 24 reais a unidade. Encontre todas as possibilidades para a compra desses dois tipos de livros, gastando todo o valor disponível.

Solução

Indicando por x a quantidade de livros do tipo A e por y a quantidade de livros do tipo B, temos que

$$26x + 24y = 5000.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $2 = (26, 24)$, obtemos a equação equivalente $13x + 12y = 2500$.

Vamos, em seguida, achar uma solução particular x_0, y_0 dessa equação. Note que, $13 \cdot (1) + 12 \cdot (-1) = 1$, e daí obtemos $13 \cdot (2500) + 12 \cdot (-2500) = 2500$. Como procuramos soluções naturais, é conveniente escrevermos $13 \cdot (12 \cdot 208 + 4) + 12 \cdot (-2500) = 2500$ e daí $13 \cdot (4) + 12 \cdot (13 \cdot 208 - 2500) = 2500$, obtendo $13 \cdot (4) + 12 \cdot (204) = 2500$

Logo $x_0 = 4$ e $y_0 = 204$ é solução natural particular da equação e, consequentemente, as soluções são

$$x = 4 + 12t \quad \text{e} \quad x = 204 - 13t; \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Como procuramos por soluções naturais devemos ter $0 \leq t \leq 15$, portanto 16 possibilidades.

Questão 4 [2,0 pt]

Determine o resto da divisão de $2^9 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$ por 7.

Solução

Devemos encontrar r, $0 \leq r \leq 6$, tal que $2^9 \cdot 3^8 \cdot 5^{13} \equiv r \bmod 7$.

Como $(2,7) = (3,7) = (5,7) = 1$, pelo Pequeno Teorema de Fermat, temos que $2^6 \equiv 1 \bmod 7$, $3^6 \equiv 1 \bmod 7$ e $5^6 \equiv 1 \bmod 7$. Logo

$$2^9 = 2^6 \cdot 2^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \bmod 7$$
$$3^8 = 3^6 \cdot 3^2 \equiv 3^2 \equiv 2 \bmod 7$$
$$5^{13} = (5^6)^2 \cdot 5 \equiv 5 \bmod 7.$$

Obtemos assim, $2^9 \cdot 3^8 \cdot 5^{13} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 5 \equiv 3 \bmod 7$.

Portanto, o resto da divisão de $2^9 \cdot 3^8 \cdot 5^{13}$ por 7 é 3.

Questão 5 [2,0 pt]

(a) Mostre que, o resto da divisão euclidiana de um número natural por 10 é o seu algarismo das unidades e que o resto da divisão euclidiana por 100 é o número formado pelos seus dois últimos algarismos, o das dezenas e o das unidades.

(b) Encontre o algarismo das dezenas e o algarismo das unidades do número $9^{(9^{100})}$.

Solução

(a) Considere um número natural $a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$, em sua representação decimal. Temos que,

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 10k + a_0,$$

onde $0 \leq a_0 \leq 9$. Portanto, a_0 é o resto da divisão de a por 10.

Analogamente,

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 = 100k + 10a_1 + a_0,$$

onde $0 \leq 10a_1 + a_0 \leq 99$. Portanto, $10a_1 + a_0 = a_1 a_0$ é o resto da divisão de a por 100.

(b) O resto da divisão de $9^{(9^{100})}$ por 100 é formado pelos seus dois últimos algarismos, então devemos calcular r tal que

$$9^{(9^{100})} \equiv r \bmod 100, \quad 0 \leq r \leq 99.$$

Como $(100, 9) = 1$, pelo Teorema de Euler, temos que

$$9^{\varphi(100)} \equiv 1 \bmod 100,$$

onde $\varphi(100) = \varphi(2^2 \cdot 5^2) = (2^2 - 2) \cdot (5^2 - 5) = 40$. Assim, temos que

$$9^{40} \equiv 1 \bmod 100.$$

Como $\varphi(40) = \varphi(2^3 \cdot 5) = 4 \cdot 4 = 16$ e $(40, 9) = 1$, temos que

$$9^{16} \equiv 1 \bmod 40.$$

Segue daí que,

$$9^{100} = 9^{16 \cdot 6 + 4} = (9^{16})^6 \cdot 9^4 \equiv 9^4 \equiv 1 \bmod 40.$$

Logo,

$$9^{100} = 1 + 40t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente, temos

$$9^{(9^{100})} = 9^{1+40t} = 9 \cdot (9^{40})^t \equiv 9 \bmod 100.$$

Portanto, o algarismo das dezenas é 0 e o das unidades é 9.