

---

**MA11 – Números e Funções Reais****Avaliação de Recuperação - MA 11****23 de novembro de 2013**

---

## 1. (valor 2,0)

Determine se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas, justificando adequadamente e em detalhes as suas respostas.

a) O produto de dois números irracionais é um número irracional. (0,5)

b) Se  $a \in \mathbb{R}$  não possui representação decimal finita, então  $\frac{1}{a}$  também não possui representação decimal finita. (0,5)

c) Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possui um ponto de máximo em  $x_0 \in \mathbb{R}$ , então a função  $f^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , também possui um ponto de máximo em  $x_0$ . (0,5)

d) Se a função  $f^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  possui um ponto de mínimo em  $x_0 \in \mathbb{R}$ , então  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  também possui um ponto de mínimo em  $x_0$ . (0,5)

## 2. (valor 2,0)

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função injetiva e sejam  $A, B \subset X$ .

a) Mostre que  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ . Indique claramente em que ponto da demonstração você usou a hipótese de injetividade. (1,0)

b) A igualdade de conjuntos demonstrada no item anterior continua valendo sem a hipótese de que  $f$  é injetiva? Justifique sua resposta, com uma demonstração ou um contra-exemplo. (1,0)

## 3. (valor 2,0)

a) Mostre que o número  $\sqrt{p}$ , em que  $p$  é um número natural primo, é irracional. (0,5)

b) Mostre que o número  $\sqrt{a}$ , em que  $a$  é um natural qualquer, é inteiro ou irracional. (1,5)

(Sugestão: Suponha que  $a$  seja racional, escreva-o na forma irredutível  $a = \frac{r}{s}$ ,  $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $s \neq 0$ , e observe que  $\sqrt{a}$  satisfaz  $x^2 - a = 0$ )

4. (valor 2,0)

Determine o polinômio  $p$  de menor grau possível que tenha uma raiz dupla em  $x = 1$  e tal que  $p(-1) = 2$ . Justifique sua resposta.

5. (valor 2,0) Certas substâncias radioativas decaem a uma taxa proporcional à própria massa. A meia-vida  $T$  de uma substância radioativa com essa propriedade é definida como o tempo decorrido até que sua massa reduza-se à metade, isto é, se a massa de uma substância com meia-vida  $T$  é dada pela função  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , então  $f(t + T) = \frac{1}{2} f(t)$ ,  $\forall t > 0$ .

a) Se a meia-vida de uma substância radioativa é de 1 hora, qual é número inteiro mínimo de horas que deve transcorrer para que sua massa fique menor do que 10% da original? (0,5)

b) Nas condições do item a), se a massa inicial dessa substância é  $m_0$ , deduza uma fórmula para sua massa em função do tempo  $t > 0$ . (0,5)

c) Verificou-se que 2 kg de uma substância radioativa se reduziram a 500 g, depois de transcorridas 3 horas. Qual é a meia vida dessa substância? (0,5)

d) Nas condições do item c), deduza uma fórmula para a massa dessa substância em função do tempo  $t > 0$ , medido em horas. (0,5)