Questão 01 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

(a) Mostre que se x e y são números irracionais tais que $x^2 - y^2$ seja racional não nulo, então $x + y$ e $x - y$ são ambos irracionais.

(b) Sabendo que a raiz quadrada de um número primo é irracional, prove que se p e q são primos distintos, então $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ e $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ são números irracionais.

Solução

(a) Sejam x e y irracionais tais que $x^2 - y^2$ é racional não nulo (em particular $x \neq \pm y$). Agora suponha, por absurdo, que $x + y$ e $x - y$ não são ambos irracionais, isto é, que pelo menos um deles é racional. Note que, como $x \neq -y$ e $x \neq y$, temos que

$$x - y = \frac{x^2 - y^2}{x + y} \quad \text{e} \quad x + y = \frac{x^2 - y^2}{x - y}.$$

donde se conclui que, no caso de $x^2 - y^2$ ser racional,

$$x + y \in \mathbb{Q} \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Mas isto implica que $x = \dfrac{(x + y) + (x - y)}{2}$ é racional, o que dá um absurdo. Logo $x + y$ e $x - y$ são números irracionais.

(b) Sejam p e q primos distintos. Logo $\sqrt{p}$ e $\sqrt{q}$ são números irracionais. Note que $\left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right) = (\sqrt{p})^2 - (\sqrt{q})^2 = p - q$ é um número racional não nulo. Portanto, pelo item (a), podemos concluir que tanto $\sqrt{p} + \sqrt{q}$ quanto $\sqrt{p} - \sqrt{q}$ são irracionais.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Deduzir que $x + y$ é racional se, e somente se, $x - y$ é racional. [0,25]
- Provar que $x + y$ e $x - y$ são irracionais. [0,25]

Item (b)

- Usar o item (a) e deduzir o resultado do item (b). [0,5]

Questão 02 **[1,00 ::: (a)=0,75; (b)=0,25]**

(a) Sabendo que sen a + sen $b = 2$ sen$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$, prove que se $x, y \in (0,\pi)$ e $x \neq y$, então sen x + sen $y < 2$ sen $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

(b) Use o resultado do item (a) para resolver a equação

$$\sqrt{\text{sen}(2x)\text{sen}\sqrt{x}} = \text{sen}\left(\frac{2x+\sqrt{x}}{2}\right),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}\ .$$

Solução

(a) Sejam $0 < x < \pi$ e $0 < y < \pi$. Combinando essas duas desigualdades obtemos

$$0 < \quad \frac{x+y}{2} \quad < \pi \tag{1}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \quad \frac{x-y}{2} \quad < \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

Como $x \neq y$, temos que $\dfrac{x-y}{2} \neq 0$, e portanto, por (2),

$$0 < \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) < 1.$$

Multiplicando esta última desigualdade por 2 sen $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$, que é um número positivo, por causa de (1), obtemos

$$2\ \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) < 2\ \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Juntando essa desigualdade com a identidade dada no enunciado, concluímos que

$$\text{sen}\ x + \text{sen}\ y < 2\ \text{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

(b) Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, temos que $0 < 2x < \pi$ e $0 < \sqrt{x} < \pi$.
Se $2x \neq \sqrt{x}$ e usando o item (a) obtemos a seguinte desigualdade

$$\sqrt{\text{sen}(2x)\text{sen}\sqrt{x}} = \text{sen}\left(\frac{2x+\sqrt{x}}{2}\right) > \frac{\text{sen}(2x)+\text{sen}\sqrt{x}}{2},$$

que contradiz a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica dos números positivos sen$(2x)$ e sen$\sqrt{x}$.
Portanto $2x = \sqrt{x}$ e assim concluímos que $x = \dfrac{1}{4}$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Deduzir que $0 < \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) < 1$. [0,25]
- Provar que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y < 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)$. [0,5]

Item (b)

- Encontrar a solução da equação. [0,25]

Questão 03 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

Considere o conjunto de todos os números naturais com quatro algarismos tais que os algarismos lidos da esquerda para a direita estão em ordem estritamente decrescente.

(a) Quantos elementos possui tal conjunto?

(b) Se escrevermos tais números em ordem crescente, que número ocupa a 109^{a} posição?

Solução

(a) A cada escolha de quatro dígitos (sem repetição), entre os dez dígitos, temos uma única ordem decrescente; portanto o número de elementos pedido é igual a

$$\binom{10}{4} = 210.$$

(b) A quantidade dos que iniciam com o dígito 3 é 1 (apenas o número 3210);

4 iniciam com o dígito 4, a saber 4210, 4310, 4320 e 4321; os que iniciam com o dígito 5 são no total de $\binom{5}{3} = 10$; com o dígito 6 são $\binom{6}{3} = 20$; com o dígito 7 são 35.

Até este momento temos um total de 70 números em ordem crescente.

A quantidade daqueles que iniciam com o dígito 8 e são seguidos do dígito:

- 2 é apenas 1 número, a saber 8210;
- 3 é $\binom{3}{2} = 3$;

- 4 é $\binom{4}{2} = 6$;
- 5 é $\binom{5}{2} = 10$;
- 6 é $\binom{6}{2} = 15$.

Agora temos um total de 105 números.
Os números seguintes serão 8710, 8720, 8721, 8730.
Assim concluímos que o número que ocupa a 109^a posição é 8730.

Pauta de Correção:

Item (a)

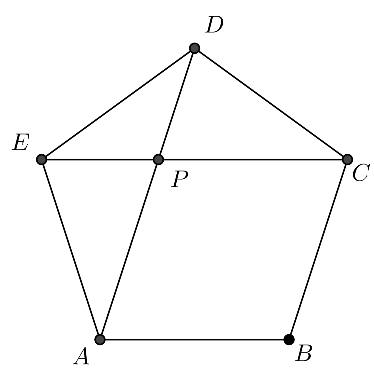
- Calcular corretamente a quantidade de elementos do conjunto. [0,5]

Item (b)

- Encontrar o número que está na 109^a posição. [0,5]

Questão 04 [1,00]

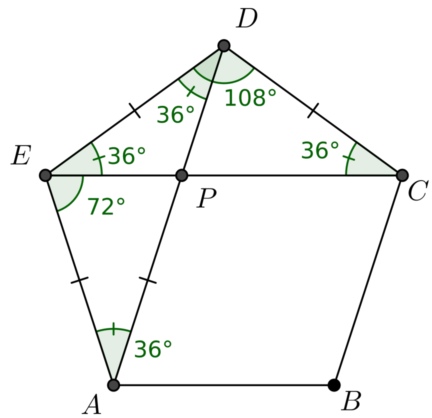
As diagonais AD e CE do pentágono regular $ABCDE$ de lados de medida a, intersectam-se no ponto P. Determine $\overline{AP}$ e $\overline{PD}$ em função de a.



Solução
Cada ângulo interno do pentágono regular tem medida

$$\hat{a}_i = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ.$$

Como $DC \equiv DE$, o triângulo CDE é isósceles de vértice D, e, como $C\hat{D}E = 108^\circ$, temos $D\hat{C}E = D\hat{E}C = \dfrac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.



Como os triângulos CDE e DEA são congruentes (LAL), temos também $D\hat{A}E = A\hat{D}E = 36°$.

Como $E\hat{A}P = 36°$ e $P\hat{E}A = 108° - 36° = 72°$, temos que $E\hat{P}A = 180° - 36° - 72° = 72°$, logo o triângulo EAP é isósceles de vértice A. Com isso, $\overline{AP} = \overline{EA} = a$.

Os triângulos DPE e DEA possuem, cada um, dois ângulos de medida $36°$, fazendo com que seus terceiros ângulos tenham também a mesma medida. Assim, esses triângulos são semelhantes, com

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}.$$

Como $\overline{EA} = \overline{DE} = a$ e $\overline{AD} = \overline{AP} + \overline{PD} = a + \overline{PD}$, temos

$$\frac{\overline{PD}}{a} = \frac{a}{a + \overline{PD}},$$

logo,

$$\overline{PD}(a + \overline{PD}) = a^2,$$

e então

$$\overline{PD}^2 + a\,\overline{PD} - a^2 = 0.$$

Resolvendo a equação, temos

$$\overline{PD} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2}.$$

Tomando a solução positiva, temos

$$\overline{PD} = \frac{a\,\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}.$$

Pauta de Correção:

- Observar ou utilizar a congruência entre os triângulos CDE e DEA. [0,25]

- Concluir que o triângulo EAP é isósceles de vértice A e obter $\overline{AP} = a$. [0,25]
- Mostrar que os triângulos DPE e DEA são semelhantes. [0,25]
- Calcular $\overline{PD}$. [0,25]

Questão 05 **[1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]**

Um cubo de 20cm de aresta, apoiado em um piso horizontal e com a parte superior aberta, contém água até a altura de 15cm. Colocando uma pirâmide regular de base quadrada sólida de altura 30cm com a base apoiada no fundo do cubo, o nível da água atinge a altura máxima do cubo, sem derramar.

(a) Qual o volume do tronco de pirâmide submerso?

(b) Qual o volume da pirâmide?

Solução

(a) Como, ao submergir o tronco de pirâmide, a água ocupa integralmente o volume do cubo, a soma do volume V_t do tronco de pirâmide com o volume inicial da água, dado por $20 \cdot 20 \cdot 15$, será o volume do cubo. Assim,

$$V_t + 15 \cdot 20^2 = 20^3$$

e, portanto,

$$V_t = 20^3 - 20^2 \cdot 15 = 20^2 \cdot (20 - 15) = 20^2 \cdot 5 = 2000\text{cm}^3.$$

Solução alternativa do item (a):

Sendo $H = 30$cm a altura da pirâmide e $a = 20$cm a aresta do cubo, o volume (V_t) do tronco de pirâmide submerso é igual ao volume da coluna de água que subiu, de 5cm, ou seja,

$$V_t = a \cdot a \cdot 5 = 20 \cdot 20 \cdot 5 = 2000\text{cm}^3.$$

(b) Sejam V o volume da pirâmide de altura $H = 30$cm e $h = H - a = 10$cm a altura da pirâmide emersa e v seu volume. Da relação entre V e v, tem-se que

$$\frac{V}{v} = \left(\frac{H}{h}\right)^3 = \left(\frac{30}{10}\right)^3$$

e, portanto,

$$v = \frac{V}{27}.$$

Mas, sabe-se que

$$V - v = V_t = 2000$$

e, com isso

$$v = V - 2000.$$

Logo,

$$\frac{V}{27} = V - 2000,$$

e, portanto,

$$V = \frac{27000}{13}\text{cm}^3.$$

Pauta de Correção:

Item (a), primeira solução:

- Indicar que o volume do tronco da pirâmide somado ao da água é igual ao volume do cubo. [0,25]
- Calcular corretamente o volume do tronco da pirâmide. [0,25]

Item (a), solução alternativa:

- Indicar que o volume do tronco da pirâmide é igual ao volume da coluna de água que subiu. [0,25]
- Calcular corretamente o volume do tronco da pirâmide. [0,25]

Item (b)

- Obter uma relação entre o volume total V da pirâmide e o volume v da parte emersa. [0,25]
- Calcular corretamente o volume total da pirâmide. [0,25]

Questão 06 [1,00]

Sejam a, b e c inteiros tais que $a^3 + b^3 + c^3$ é divisível por 9. Mostre que pelo menos um dos inteiros a, b ou c é divisível por 3.

Solução

Observamos primeiramente que, se um número n não é divisível por 3 então ele é da forma $3k + 1$ ou $3k + 2$, logo n^3 é da forma $9k + 1$ ou $9k + 8$.

Suponha que nenhum dos inteiros a, b, c seja divisível por 3. Segue que os cubos desses números são da forma $9k + 1$ ou $9k + 8$.

Considerando todas as possibilidades para a soma de três cubos, a soma $a^3+b^3+c^3$ será da forma $9k + 1$, $9k + 3$, $9k + 6$ ou $9k + 8$:

			$a^3 + b^3 + c^3$
$9k_1 + 1$	$9k_2 + 1$	$9k_3 + 1$	$9k + 3$
$9k_1 + 1$	$9k_2 + 1$	$9k_3 + 8$	$9k + 1$
$9k_1 + 1$	$9k_2 + 8$	$9k_3 + 8$	$9k + 8$
$9k_1 + 8$	$9k_2 + 8$	$9k_3 + 8$	$9k + 6$

Portanto, obtemos $a^3 + b^3 + c^3$ não divisível por 9.

Solução alternativa:

Observamos primeiramente que, se um número n não é divisível por 3 então ele é da forma $3k+1$ ou $3k+2$, logo n^3 é da forma $9k+1$ ou $9k+8$.

Portanto, se n não é divisível por 3 então $n^3 \equiv 1 \bmod 9$ ou $n^3 \equiv 8 \bmod 9$.

Suponha que nenhum dos inteiros a, b, c seja divisível por 3. Segue que os cubos desses números são congruentes a 1 ou a 8 módulo 9.

Considerando todas as possibilidades para a soma de três cubos teremos:
$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 1 + 1 + 1 \equiv 3 \bmod 9$
$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 1 + 1 + 8 \equiv 1 \bmod 9$
$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 1 + 8 + 8 \equiv 8 \bmod 9$
$a^3 + b^3 + c^3 \equiv 8 + 8 + 8 \equiv 6 \bmod 9$
Portanto, obtemos $a^3 + b^3 + c^3$ não divisível por 9.

Pauta de Correção:

- Observar que, se n não é divisível por 3 então n é da forma $3k+1$ ou $3k+2$. [0,25]
- Observar que, se n não é divisível por 3 então n^3 é da forma $9k+1$ ou $9k+8$. [0,25]
- Supor que nenhum dos inteiros a, b, c seja divisível por 3 e considerar todas as possibilidades para $a^3 + b^3 + c^3$. [0,25]
- Concluir o resultado. [0,25]

Questão 07 [1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50]

(a) Considere um conjunto formado por 11 números inteiros positivos diferentes, menores do que 21. Prove que podemos escolher dois desses números tais que um divide o outro.

(b) Exiba um conjunto com 10 números inteiros positivos, menores do que 21, tais que nenhum deles é múltiplo de outro.

Solução

(a) Vamos distribuir os números de 1 a 20 em 10 conjuntos disjuntos como, por exemplo: $\{1,2,4,8,16\}$, $\{3,6,12\}$, $\{5,10,20\}$, $\{7,14\}$, $\{9,18\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$.

Tomando 11 números de 1 a 20, pelo Princípio das Gavetas, como há 10 conjuntos, necessariamente teremos 2 números no mesmo conjunto, e portanto, temos a propriedade desejada.

(b) Algumas respostas possíveis:
$\{11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$, $\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$,
$\{9,11,12,13,14,15,16,17,19,20\}$, $\{9,10,11,12,13,14,15,16,17,19\}$
$\{8,11,12,13,14,15,17,18,19,20\}$, $\{8,10,11,12,13,14,15,17,18,19\}$,

$\{8,9,10,11,12,13,14,15,17,19\}$, $\{7,8,11,12,13,15,17,18,19,20\}$, $\{7,8,10,11,12,13,15,17,18,19\}$, $\{6,7,9,10,11,13,15,16,17,19\}$, $\{6,7,8,9,11,13,15,17,19,20\}$, $\{6,7,8,9,10,11,13,15,17,19\}$, $\{6,7,9,11,13,15,16,17,19,20\}$, $\{6,7,8,9,10,11,13,15,17,19\}$, $\{6,9,10,11,13,14,15,16,17,19\}$, $\{6,8,9,11,13,14,15,17,19,20\}$, $\{6,9,11,13,14,15,16,17,19,20\}$, $\{4,6,9,10,11,13,14,15,17,19\}$ e $\{4,6,7,9,10,11,13,15,17,19\}$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Exibir a partição do conjunto dos números de 1 a 20 em 10 conjuntos dois a dois disjuntos com a propriedade indicada na solução. [0,25]
- Concluir a prova do item (a). [0,25]

Item (b)

- Exibir um conjunto com a propriedade solicitada. [0,5]

Questão 08 [**1,00 ::: (a)=0,50; (b)=0,50**]

Considere o seguinte sistema de congruências

$$\begin{cases} X \equiv 1 \bmod 9 \\ X \equiv 5 \bmod 7 \\ X \equiv 3 \bmod 5 \end{cases}$$

(a) Encontre o menor número natural que satisfaz o sistema.

(b) Alguma solução do sistema é solução da congruência $X \equiv 926 \bmod 3$?

Solução

(a) Como $(9,7) = 1$, $(9,5) = 1$ e $(7,5) = 1$, o sistema tem solução. Pelo Teorema Chinês dos Restos as soluções do sistema são

$$x = 35 \cdot y_1 \cdot 1 + 45 \cdot y_2 \cdot 5 + 63 \cdot y_3 \cdot 3 + t \cdot 315$$

sendo $t \in \mathbb{Z}$, y_1 solução de $35Y \equiv 1 \bmod 9$, y_2 solução de $45Y \equiv 1 \bmod 7$ e y_3 solução de $63Y \equiv 1 \bmod 5$. Os inteiros $y_1 = 8$, $y_2 = 5$ e $y_3 = 2$ satisfazem as condições impostas. Portanto

$$x = 35 \cdot 8 + 45 \cdot 25 + 63 \cdot 6 + 315 \cdot t = 1783 + t \cdot 315$$

Para encontrar e menor solução positiva devemos impor $1783 + t \cdot 315 > 0$ para $t \in \mathbb{Z}$.

$$1783 + t \cdot 315 > 0 \iff t > \frac{-1783}{315} \iff t \geqslant -5$$

A menor solução é $x_0 = 1783 - 5 \cdot 315 = 208$.

(a) Solução alternativa

Observe que

$$\begin{cases} X \equiv 1 \bmod 9 \\ X \equiv 5 \bmod 7 \\ X \equiv 3 \bmod 5 \end{cases} \iff \begin{cases} X \equiv 1 \bmod 9 \\ X \equiv -2 \bmod 35 \end{cases}$$

Assim, $x = 1 + 9k = -2 + 35t$, com $k, t \in \mathbb{Z}$.

Segue-se que $35t - 9k = 3$ com solução particular $t_0 = -3$, $k_0 = -12$ e solução geral dada por

$$\begin{cases} t = -3 + 9r, \quad r \in \mathbb{Z} \\ k = -12 + 35r, \quad r \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Portanto, $x = 1 + 9(-12 + 35r)$ e a menor solução natural ocorre quando $r = 1$, obtendo $x = 208$.

(b) As soluções do sistema são as soluções da congruência $X \equiv 208 \bmod 315$. Portanto queremos saber se o sistema de congruências

$$\begin{cases} X \equiv 208 \bmod 315 \\ X \equiv 926 \bmod 3 \end{cases}$$

possui solução. Suponhamos que existe $a \in \mathbb{Z}$ que satisfaz o sistema, isto é, existem $y, z \in \mathbb{Z}$ tais que $a - 208 = y \cdot 315$ e $a - 926 = z \cdot 3$. Subtraindo as equações, temos $718 = 315y - 3z$. Como a última equação não tem solução, pois $(315, 3) = 3$ não divide 718, então o sistema não tem solução. Ou seja, nenhuma solução do item (a) é solução da equação $X \equiv 926 \bmod 3$.

Pauta de Correção:

Item (a)

- Encontrar as soluções do sistema de congruências. [0,25]
- Encontrar a menor solução. [0,25]

Item (b)

- Descrever o sistema de congruências. [0,25]
- Mostrar que o sistema não tem solução. [0,25]