Avaliação 1 - MA14 - 2013 - 2° semestre

GABARITO

Questão 1 (valor: 2 pontos)

a) (1,0) Prove que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) (1,0) Calcule $1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+1000)$.

Uma solução:

a) Basta usar o Princípio de Indução Finita.

A fórmula é obviamente verdadeira para $n = 1$: $1^2 = \dfrac{1(1+1)(2.1+1)}{6}$.

Admitamos que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Mostraremos que $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\
&= \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Desta maneira, a fórmula é verdadeira para todo número natural $n \geq 1$.

Apresentamos, a seguir, uma segunda solução, que tem a vantagem de não precisar conhecer de antemão a fórmula fechada. Como $(i+1)^3 - i^3 = 3i^2 + 3i + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 - 1 &= \sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n
\end{aligned}$$

Isto implica que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) Vamos calcular a soma pedida encontrando primeiramente uma fórmula fechada para a soma

$$1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n)$$

Observe inicialmente que $1 + 2 + \cdots + i = \dfrac{i(i+1)}{2}$. Assim,

$$\begin{aligned}
1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}$$

Pelo ítem a), $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e, portanto,

$$
\begin{aligned}
1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+n) &= \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}
\end{aligned}
$$

Fazendo $n = 1000$ na expressão acima, temos

$$
\begin{aligned}
1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+3+\cdots+1000) &= \frac{1000 \,.\, 1001 \,.\, 1002}{6} \\
&= 167167000
\end{aligned}
$$

Questão 2 (valor: 2 pontos)

Encontre todos os números inteiros $a \geq 1$ tais que $a + 2 \,|\, a^4 + 2$.

Uma solução:

Temos que $a^4 + 2 = (a+2)(a^3 - 2a^2 + 4a - 8) + 18$. Assim, $a + 2 \,|\, a^4 + 2$ se, e somente se, $a + 2 \,|\, 18$. Isto implica que $a + 2 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ e como $a \geq 1$, há apenas quatro soluções: $a = 1$, $a = 4$, $a = 7$ e $a = 16$.

Questão 3 (valor: 2 pontos)

Denota-se por (a, b) o máximo divisor comum de dois números inteiros a e b. Calcule

$$\Big(\frac{2^{50}+1}{2^{10}+1}, 2^{10}+1\Big).$$

Uma solução:

Temos

$$2^{50} + 1 = (2^{10})^5 + 1 = (2^{10} + 1)\left((2^{10})^4 - (2^{10})^3 + (2^{10})^2 - 2^{10} + 1\right)$$

Isto implica que

$$
\begin{aligned}
\frac{2^{50}+1}{2^{10}+1} &= (2^{10})^4 - (2^{10})^3 + (2^{10})^2 - 2^{10} + 1 \\
&= [(2^{10})^4 - 1] - [(2^{10})^3 + 1] + [(2^{10})^2 - 1] - [2^{10} + 1] + 5
\end{aligned}
$$

Como $2^{10} + 1$ divide cada um dos termos entre colchetes do lado direito da última igualdade acima, vemos que

$$\Big(\frac{2^{50}+1}{2^{10}+1}, 2^{10}+1\Big) = (2^{10}+1, 5) = (1025, 5) = 5$$

.

Questão 4 (valor: 2 pontos)

Seja $n = a_r a_{r-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ um número natural escrito em sua representação decimal. Mostre que n é divisível por 7, 11 ou 13 se, e somente se, $a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - \cdots$ é divisível, respectivamente, por 7, 11 ou 13.

(Sugestão: Observe que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.)

Uma solução:

Temos

$$\begin{aligned}
n &= a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + a_3\cdot 10^3 + a_4\cdot 10^4 + a_5\cdot 10^5 + \cdots + a_{r-1}\cdot 10^{r-1} + a_r\cdot 10^r\\
&= a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + 10^3(a_3 + a_4\cdot 10 + a_5\cdot 10^2) + 10^6(a_6 + a_7\cdot 10 + a_8\cdot 10^2) + \cdots\\
&= a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + (10^3+1)(a_3 + a_4\cdot 10 + a_5\cdot 10^2) - (a_3 + a_4\cdot 10 + a_5\cdot 10^2)\\
&\quad + (10^6-1)(a_6 + a_7\cdot 10 + a_8\cdot 10^2) + (a_6 + a_7\cdot 10 + a_8\cdot 10^2) + \cdots\\
&= (a_2a_1a_0) + (10^3+1)(a_5a_4a_3) - (a_5a_4a_3) + (10^6-1)(a_8a_7a_6) + (a_8a_7a_6)\\
&\quad + (10^9+1)(a_{11}a_{10}a_9) - (a_{11}a_{10}a_9) + \cdots
\end{aligned}$$

Como $10^3+1|(10^3)^{2m+1}+1,\ 10^3+1|(10^3)^{2m}-1, m\in\mathbb{N}$, e $10^3+1 = 7\cdot 11\cdot 13$, concluímos que 7, 11 ou 13 dividem n se, e somente se, $7, 11$ ou 13 dividem

$$a_2a_1a_0 - a_5a_4a_3 + a_8a_7a_6 - a_{11}a_{10}a_9 + \cdots.$$

Questão 5 (valor: 2 pontos)

Uma pilha de cocos foi coletada por três homens, ajudados por um macaco. À noite, um dos homens acordou enquanto os outros estavam dormindo e dividiu os cocos em 3 partes iguais, sobrando um coco, o qual deu ao macaco. Este homem escondeu uma das partes, juntou as outras duas em uma pilha (no mesmo local onde estava a pilha original) e voltou a dormir. Seguidamente, cada um dos outros dois homens realizou o mesmo procedimento, sempre sobrando um coco, que era dado ao macaco. De manhã, os três homens dividiram os cocos restantes em 3 partes iguais e novamente sobrou um coco, que foi dado ao macaco. Qual é o menor número de cocos que poderia ter a pilha original?

Uma solução:

Seja n o número de cocos da pilha. Como o primeiro homem a dividiu em 3 pilhas iguais e deu o coco restante ao macaco, vemos que

$$n = 3k+1,\ k\in\mathbb{N}.$$

Em seguida, o homem escondeu k cocos e deu um ao macaco. Desta forma, restaram $n-k-1$ cocos. Como o segundo homem fez o mesmo e ainda restou um coco, vemos que

$$n-k-1 = 3p+1,\ p\in\mathbb{N}.$$

Depois de dar o coco restante ao macaco e esconder uma das partes, sobraram $(n-k-1)-p-1$ cocos. Como o terceiro homem realizou o mesmo procedimento, vemos que

$$(n-k-1)-p-1 = 3r+1,\ r\in\mathbb{N}.$$

Após a ação do terceiro homem, restaram $((n-k-1)-p-1)-r-1$ cocos. Pela manhã o número de cocos que restaram ainda era da forma

$$((n-k-1)-p-1)-r-1 = 3m+1,\ m\in\mathbb{N}.$$

Substituindo, a começar da primeira, cada uma das equações em destaque acima na equação em destaque que está imediatamente abaixo dela, obtemos

$$\begin{aligned} n &= 3k+1; \\ 2k &= 3p+1; \\ 2p &= 3r+1; \\ 2r &= 3m+1. \end{aligned}$$

Isto implica

$$\begin{aligned} n &= 3k+1 && = 3\left(\frac{3}{2}p + \frac{1}{2}\right) + 1 \\ &= \frac{9}{2}p + \frac{5}{2} && = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}r + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \\ &= \frac{27}{4}r + \frac{19}{4} && = \frac{27}{4}\left(\frac{3}{2}m + \frac{1}{2}\right) + \frac{19}{4} \\ &= \frac{81}{8}m + \frac{65}{8}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$8n - 81m = 65.$$

Como $(8, 81) = 1$, uma solução da equação $8n - 81m = 1$ em $\mathbb{Z}$ é $n = -10$ e $m = -1$. Isto implica que as soluções da equação $8n - 81m = 1$ são da forma

$$n = -10 + 81t,\ m = -1 + 8t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Desta forma, a solução geral de $8n - 81m = 65$ é

$$n = -650 + 81t,\ m = -65 + 8t,\ t \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, o menor número de cocos que a pilha pode ter ocorre para $t = 9$, isto é, ocorre quando a quantidade de cocos é igual a 79.