SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM REDE NACIONAL
PROFMAT

2ª Avaliação Nacional de Aritmética - MA14 - 07/12/2013

1. (a) Ache a maior potência de 104 que divide 1000!.

Uma solução. Temos que $104 = 2^3 \cdot 13$. Calculando as potências de 2 que dividem 1000!, temos

$$\left[\frac{1000}{2}\right] = 500, \quad \left[\frac{1000}{4}\right] = 250, \quad \left[\frac{1000}{8}\right] = 125,$$

$$\left[\frac{1000}{16}\right] = 62, \quad \left[\frac{1000}{32}\right] = 31, \quad \left[\frac{1000}{64}\right] = 15,$$

$$\left[\frac{1000}{128}\right] = 7, \quad \left[\frac{1000}{256}\right] = 3, \quad \left[\frac{1000}{512}\right] = 1.$$

Desta forma, pelo Teorema de Legendre,

$$E_2(1000!) = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 994.$$

Analogamente,

$$\left[\frac{1000}{13}\right] = 76, \left[\frac{1000}{169}\right] = 5.$$

Portanto

$$E_{13}(1000!) = 76 + 5 = 81.$$

Desta forma $1000! = 2^{994}13^{81}M$, para algum $M \in \mathbb{N}$, $(M, 2) = (M, 13) = 1$. Assim,

$$1000! = 2^{994}13^{81}M = 2(2^3)^{331}13^{81}M = 2(104)^{81}8^{250}M.$$

Logo a maior potência de 104 que divide 1000! é 81.

(b) Prove que não existe nenhum número natural n tal que 3^7 seja a maior potência de 3 que divida $n!$.

Uma solução. Observe que $3|3$, $3|6$, $3^2|9$, $3|12$, $3|15$, e $3^2|18$. Desta forma 3^6 é a maior potência de 3 que divide $15!$, $16!$ e $17!$, enquanto que 3^8 é a maior potência de 3 que divide $18!$. Como $3^8|n!$ para todo $n > 18$, concluímos que não existe natural n tal que 3^7 é a maior potência de 3 que divide $n!$.

2. (a) Demonstre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $101^{6n} - 1$ é divisível por 70;

Uma solução. Temos que $101^2 \equiv 51 \mod 70$, $101^4 \equiv 51^2 \equiv 11 \mod 70$, $101^6 \equiv 51 \cdot 11 \equiv 1 \mod 70$. Desta forma $70|101^6 - 1$. Como

$$101^{6n} - 1 = (101^6 - 1)(101^{6n-1} + 101^{6n-2} + \cdots + 101^6 + 1),$$

concluímos que $70|101^{6n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Outras soluções: Há várias outras soluções. Por exemplo, o resultado pode ser provado usando-se o Princípio de Indução Finita. Outra solução trivial segue da congruência $101^6 \equiv 1 \mod 70$ e das propriedades da potenciação.

(b) Determine o resto da divisão por 7 do número $1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + 100^7$.

Uma solução. Usando o Pequeno Teorema de Fermat, vemos que

$$a^7 \equiv a \mod 7, \ a = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Além disso, se $n = 7k + a$, então $n^7 = (7k + a)^7 \equiv a^7 \equiv a \mod 7$, $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Desta forma,

$$\begin{aligned} 1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + 100^7 &\equiv (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 0) + \cdots \\ &\quad + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 0) + 1 + 2 \\ &= \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 14 + 3 = 21 \cdot 14 + 3 \equiv 3 \mod 7. \end{aligned}$$

Portanto, o resto da divisão de $1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + 100^7$ por 7 é 3.

3. Mostre que um número da forma $n = 2^r 3^s$ é perfeito se, e somente se, $r = s = 1$.

Uma solução. Se $n = 2^r 3^s$, então a soma de todos os divisores de n é

$$S(n) = \left(2^{r+1} - 1\right)\left(\frac{3^{s+1} - 1}{2}\right).$$

Se n é um número perfeito, então $S(n) = 2n$. Isto implica

$$(2^{r+1} - 1)(3^{s+1} - 1) = 2^{r+2}3^s.$$

Como 2 não divide $2^{r+1} - 1$ e 3 não divide $3^{s+1} - 1$, temos que $2^{r+2}|3^{s+1} - 1$ e $3^s|2^{r+1} - 1$. Desta forma $3^{s+1} - 1 = 2^{r+2}k_1$ e $2^{r+1} - 1 = 3^s k_2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$(2^{r+1} - 1)(3^{s+1} - 1) = 2^{r+2}3^s k_1 k_2$$

e isto implica que $k_1 = k_2 = 1$. Desta forma, para encontrar r e s, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3^{s+1} - 1 = 2^{r+2} \\ 2^{r+1} - 1 = 3^s \end{cases}$$

Este sistema tem solução única: $r = s = 1$.

A recíproca é óbvia pois $S(6) = 12$.

4. Sejam p e q números primos distintos. Mostre que $pq|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.

Uma solução. Como p e q são primos, o Pequeno Teorema de Fermat implica que

$$q|p^{q-1} - 1 \;\text{ e }\; p|q^{p-1} - 1.$$

Desta forma

$$\begin{aligned} pq|(q^{p-1} - 1)(p^{q-1} - 1) &= p^{q-1}q^{p-1} - p^{q-1} - q^{p-1} + 1 \\ &= p^{q-1}q^{p-1} - (p^{q-1} + q^{p-1} - 1), \end{aligned}$$

pois $(p, q) = 1$.

Como $pq|p^{q-1}q^{p-1}$, segue que $pq|p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.

5. Encontre três números inteiros consecutivos tais que o primeiro é divisivel pelo quadrado de um número primo, o segundo é divisível pelo cubo de um número primo e o terceiro é divisível pela quarta potência de um número primo.

Uma solução. Sejam p, q e r números primos. Devemos resolver o sistema de congruências

$$\begin{cases} x \equiv 0 \mod p^2 \\ x + 1 \equiv 0 \mod q^3 \\ x + 2 \equiv 0 \mod r^4, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x \equiv 0 \mod p^2 \\ x \equiv -1 \mod q^3 \\ x \equiv -2 \mod r^4. \end{cases} \tag{1}$$

Como $(p^2, q^3) = (p^2, r^4) = (q^3, r^4) = 1$, usando o Teorema Chinês dos Restos, vemos que o sistema de congruências (1) tem solução

$$x = M_2 y_2(-1) + M_3 y_3(-2) + tM, \quad t \in \mathbb{Z},$$

em que $M = p^2 q^3 r^4$, $M_2 = p^2 r^4$, $M_3 = p^2 q^3$ e y_2, y_3 são soluções de $p^2 r^4 Y \equiv 1 \mod q^3$ e $p^2 q^3 Y \equiv 1 \mod r^4$, respectivamente.

Logo, podemos tomar quaisquer primos p, q, r e obter um número x com as propriedades pedidas. Tomando, por exemplo, $r = 2$, $q = 3$ e $p = 5$, obtemos o sistema de congruências

$$\begin{cases} x \equiv 0 \mod 25 \\ x \equiv -1 \mod 27 \\ x \equiv -2 \mod 16, \end{cases} \tag{2}$$

cujas soluções são dadas por

$$x = -400 y_2 - 2 \cdot 675 y_3 + 10800t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

Aqui y_2 e y_3 são, respectivamente, soluções de $400Y \equiv 1 \mod 27$ e $675Y \equiv 1 \mod 16$.

Resolvendo-as, obtemos, $y_2 = -11 \bmod 27$ e $y_3 = -5 \bmod 16$. Portanto,

$$x = 11150 + 10800t.$$

Por exemplo, tomando $t = -1$, temos

$$x = 350 = 5^2 \cdot 14,$$

$$x + 1 = 351 = 3^3 \cdot 13$$

$$x + 2 = 352 = 2^4 \cdot 22.$$