Gabarito da 3a. Prova de Aritmética - MA14

2012/2 semestre

Questão 1 *(valor total: 2 pontos)*

(valor: 0,5) a) Mostre que a soma dos quadrados de dois números ímpares nunca é um quadrado.

(valor: 0,5) b) Mostre que todo quadrado perfeito é da forma $5k$, $5k+1$ ou $5k+4$.

(valor: 1,0) c) Mostre que se três inteiros verificam $a^2 = b^2 + c^2$, então b ou c é par e um dos três números a, b ou c é múltiplo de 5.

Uma solução:

a) Se $b = 2n+1$ e $c = 2m+1$, então $b^2 + c^2 = 4(n^2 + n + m^2 + m) + 2$, que é par mas não múltiplo de 4, logo não pode ser um quadrado, pois se $a^2 = b^2 + c^2$, então $2|a^2$, logo $2|a$ e portanto $4|a^2$.

b) Todo número inteiro se escreve de uma das seguintes formas: $5m$, $5m+1$, $5m+2$, $5m+3$ ou $5m+4$. Elevando ao quadrado cada uma dessas formas obtemos

$$\begin{array}{rcl} (5m)^2 & = & 25m^2 = 5k, \\ (5m+1)^2 & = & 25m^2 + 10m + 1 = 5k+1, \\ (5m+2)^2 & = & 25m^2 + 20m + 4 = 5k+4, \\ (5m+3)^2 & = & 25m^2 + 30m + 9 = 5k+4, \\ (5m+4)^2 & = & 25m^2 + 40m + 16 = 5k+1. \end{array}$$

c) Pelo ítem a), um dos números b ou c tem que ser par.

Por outro lado, se nenhum dos números for múltiplo de 5, então a^2, b^2 e c^2 não são múltiplos de 5, logo, pelo ítem b), são da forma $5k+1$ ou $5k+4$. Logo a soma $b^2 + c^2$ resulta em um número da forma $5k+2$ ou $5k+3$, então $a^2 = b^2 + c^2$ é também da forma $5k+2$ ou $5k+3$, o que é uma contradição com o ítem b).

Questão 2 *(valor: 2 pontos)*

Um grupo de 30 pessoas formado por homens, mulheres e crianças, ganhou numa loteria um prêmio de R\$ 30.000,00 que foi dividido entre elas da seguinte forma: Cada homem recebeu R\$ 2.000,00, cada mulher recebeu R\$ 500,00 e cada criança recebeu R\$ 100,00. Qual é a quantidade de homens, mulheres e crianças que havia no grupo?

Uma solução:

Seja X o número de homens, Y o de mulheres e Z o de crianças. Assim, temos

$$X + Y + Z = 30.$$

Por outro lado,

$$2000X + 500Y + 100Z = 30000,$$

logo, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} X + Y + Z = 30 \\ 20X + 5Y + Z = 300 \end{cases} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{cases} X + Y + Z = 30 \\ 19X + 4Y = 270 \end{cases}$$

Uma solução minimal (x, y) da equação $19X + 4Y = 270$ é tal que $0 < x \leqslant 3$. Testando valores, vemos que $(2, 58)$ é uma solução particular dessa equação, logo a solução geral é $x = 2 + 4t$ e $y = 58 - 19t$, com $t \in \mathbb{N}$. Portanto, a solução geral do último sistema é dada por

$$\begin{aligned} x &= 2 + 4t \\ y &= 58 - 19t \\ z &= 30 - x - y = -30 + 15t. \end{aligned}$$

Assim, a única posibilidade do enunciado do problema estar satisfeito ocorre quando $t = 3$, logo $x = 14$, $y = 1$ e $z = 15$.

Questão 3 *(valor: 2 pontos)*

Mostre que

$$2^{1000} | 1001 \times 1002 \times \cdots \times 2000,$$

mas que

$$2^{1001} \not| 1001 \times 1002 \times \cdots \times 2000.$$

Uma solução:

Como

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n) = \frac{(2n)!}{n!},$$

temos que

$$E_2((n+1)(n+2)\cdots(2n)) = E_2((2n)!) - E_2(n!).$$

Pelo Teorema de Legendre, temos que

$$E_2((2n)!) = \left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{4}\right] + \cdots = n + E_2(n!).$$

Portanto,

$$E_2((n+1)(n+2)\cdots(2n)) = E_2((2n)!) - E_2(n!) = n + E_2(n!) - E_2(n!) = n.$$

O resultado segue tomando $n = 1000$.

Questão 4 *(valor: 2 pontos)*

Ache o resto da divisão de $1^5 + 2^5 + \cdots + 183^5$ por 5.

Uma solução:

Pelo Pequeno Teorema de Fermat temos que $n^5 \equiv n \mod 5$, logo

$$1^5 + 2^5 + \cdots + 183^5 \equiv 1 + 2 + \cdots + 183 = \frac{184 \times 183}{2} \mod 5.$$

Mas,

$$\frac{184 \times 183}{2} = 92 \times 183 \equiv 2 \times 3 \equiv 1 \bmod 5.$$

Portanto, a resposta é 1.

Questão 5 *(valor: 2 pontos)*

a) Ache o menor número natural M que é termo comum às seguintes progressões aritméticas:

$$a_n = 5n + 1, \quad b_n = 7n + 3, \quad c_n = 9n + 5,$$

ou seja, determine o menor número natural M para o qual existem r, s e t tais que $a_r = b_s = c_t = M$.
b) Encontre os valores dos índices r, s e t tais que $a_r = b_s = c_t = M$.

Uma solução:

a) Um termo comum às progressões é solução do sistema

$$\begin{cases} X \equiv 1 \quad \bmod 5, \\ X \equiv 3 \quad \bmod 7, \\ X \equiv 5 \quad \bmod 9, \end{cases}$$

Com as notações do Teorema Chinês dos Restos, temos $N = 5 \times 7 \times 9 = 315$, logo $N_1 = 7 \times 9 = 63$, $N_2 = 5 \times 9 = 45$ e $N_3 = 5 \times 7 = 35$. Devemos resolver as congruências $N_1 Y = 63Y \equiv 1 \mod 5$, $N_2 Y = 45Y \equiv 1 \mod 7$ e $N_3 Y = 45Y \equiv 1 \mod 9$. Por inspeção, encontramos as seguintes respectivas soluções: $y_1 = 2$, $y_2 = 5$ e $y_3 = 8$. Assim, o sistema de congruências possui a única solução

$$x = N_1 y_1 \times 1 + N_2 y_2 \times 3 + N_3 y_3 \times 5 = 126 + 675 + 1\,400 = 2\,201$$

módulo $N = 315$. A menor solução é dada pelo resto da divisão de x por N que é $M = 311$.

b) Segue de a) que

$$\begin{cases} 5r + 1 = 311 \\ 7s + 3 = 311 \\ 9t + 5 = 311. \end{cases}$$

Portanto, temos $a_{62} = b_{44} = c_{34} = 311$.