Questão 1.

Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 3,5 litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

(1.0) (a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?

(1.0) (b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo 3,5 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

UMA RESPOSTA

Uma solução concisa é a seguinte:

(a) O número de pessoas aumentou em $\frac{10}{7}$. Portanto a água disponível para cada um deve ser $\frac{7}{10}$ do que era antes (3,5 litros), isto é, $\frac{49}{20} = 2,45$ litros.

(b) As 7 pessoas teriam água pelos 30 dias restantes, mas agora há $\frac{10}{7}$ vezes o número anterior de pessoas. Isso reduz os dias a $\frac{7}{10} \cdot 30 = 21$.

Outra forma de pensar é a seguinte. Primeiro calcula-se a quantidade Q de água que resta após 12 dias. Como restam 30 dias de viagem, com 7 pessoas consumindo 3,5 litros por dia, são $Q = 30 \times 7 \times 3,5$ litros (como a quantidade de água é justa para os 42 dias e os primeiros 12 dias transcorreram como previsto, conclui-se que o que resta para os outros 30 dias também é justo).

(a) Esse total deve ser consumido nos mesmos 30 dias, mas agora por 10 pessoas. Então o consumo diário de cada um é Q dividido por 30×10, que dá $\frac{7}{10} \times 3,5 = 2,45$ litros.

(b) Se todos consumirem 3,5 litros por dia, a cada dia transcorrido após o décimo segundo dia serão consumidos 35 litros. Portanto, após n dias restarão $Q - 35n$ litros. Queremos saber o maior n tal que $Q - 35n \geq 0$, isto é, o maior n que seja menor ou igual a $\frac{Q}{35}$. Mas $\frac{Q}{35} = 30 \times \frac{7}{10} = 21$, então em 21 dias (exatamente) se esgotará o reservatório de água.

Questão 2.

(1.0) (a) Quais são os valores de y para os quais existe uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$?

(1.0) (b) Tome $y = 9$ e determine a função quadrática correspondente. Justifique seus argumentos.

UMA RESPOSTA

(a) Para que exista uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$ é necessário e suficiente que os pontos $(1, 3)$, $(2, 5)$ e $(3, y)$ não sejam colineares, isto é, que $\frac{5-3}{2-1} \neq \frac{y-5}{3-2}$, ou seja, que $y - 5 \neq 2$, ou ainda, $y \neq 7$.

(b) Para obter os coeficientes a, b, c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve-se resolver o sistema (nas incógnitas a, b, c)

$$\begin{cases} a + b + c &= 3 \\ 4a + 2b + c &= 5 \\ 9a + 3b + c &= 9 \end{cases}$$

Isto é feito de modo simples: basta subtrair a primeira equação das duas seguintes. Tem-se

$$\begin{cases} 3a + b &= 2 \\ 8a + 2b &= 6 \end{cases}$$

Por subtração (segunda menos duas vezes a primeira), ficamos com $2a = 2$, de onde sai imediatamente $a = 1$. Substituindo esse valor em $3a + b = 2$, obtemos $b = -1$, e voltando à equação $a + b + c = 3$ obtemos $c = 3$. Portanto $x^2 - x + 3$ é a função quadrática procurada.

Comentário: Há diversas outras formas de se resolver o problema. Por exemplo: tome primeiro a função $g(x) = 1+2x$, que é a função afim tal que $g(1) = 3$ e $g(2) = 5$. Observe que $f(x) = g(x) + a(x-1)(x-2)$ é uma função quadrática que assume os mesmos valores que g nos pontos $x = 1$ e $x = 2$. Então basta achar a que faça $f(3) = y$. Ora,

$$f(3) = 1 + 2 \cdot 3 + a(3-1)(3-2) = 7 + 2a\,.$$

Então $7 + 2a = y$ e, portanto, $a = \frac{y-7}{2}$. Por conseguinte,

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{y-7}{2}(x-1)(x-2)$$

responde o problema para qualquer y. Em particular, para $y = 9$,

$$f(x) = 1 + 2x + (x-1)(x-2) = x^2 - x + 3\,.$$

Questão 3.

(1.0) (a) Seja $f : A \to B$ uma função. Dê as definições de $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$, para $X \subset A$ e $Y \subset B$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, determine os conjuntos $f(\mathbb{R})$ e $f^{-1}(3)$.

(1.0) (b) Seja $f : A \to B$ uma função. Prove que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, quaisquer que sejam $X, Y \subset A$. Dê um exemplo em que $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

UMA RESPOSTA

(a) Definição da imagem de um subconjunto X de A:

$$f(X) = \{y \in B; f(x) = y \text{ para algum } x \in X\}\,.$$

Definição da pré-imagem de um subconjunto Y de B:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}\,.$$

Agora consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$. Como o coeficiente de x^2 é positivo, a função quadrática assume seu valor mínimo $f(-\frac{3}{4}) = \frac{23}{8}$ para $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{4}$. Assim, $f(x) \geq \frac{23}{8}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(\mathbb{R}) \subset [\frac{23}{8}, +\infty)$. Além disso, para todo $y \geq \frac{23}{8}$, a equação $f(x) = y$, ou seja, $2x^2 + 3x + 4 = y$, que equivale a $2x^2 + 3x + 4 - y = 0$, tem discriminante $\Delta = 9 - 32 + 8y \geq -23 + 23 = 0$, logo existe(m) valor(es) de x com $f(x) = y$. Assim $f(\mathbb{R}) = [\frac{23}{8}, +\infty)$.

$f^{-1}(3)$ é o conjunto dos pontos x tais que $f(x) = 3$, isto é, tais que $2x^2 + 3x + 4 = 3$. Então é o conjunto das soluções de $2x^2 + 3x + 1 = 0$, que é igual a $\{-1, -\frac{1}{2}\}$.

Comentário: $f^{-1}(3)$ é um abuso de linguagem amplamente aceito para designar $f^{-1}(\{3\})$.

(b) $z \in f(X \cup Y)$ se, e somente se, existe $w \in X \cup Y$ tal que $f(w) = z$, que por sua vez ocorre se, e somente se, existe $x \in X$ tal que $f(x) = z$ ou existe $y \in Y$ tal que $f(y) = z$, que ocorre se, e somente se, $z \in f(X)$ ou $z \in f(Y)$, que ocorre se, e somente se, $z \in f(X) \cup f(Y)$.

Tome $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = x^2$, $X = [-1, 0]$ e $Y = [0, 1]$. Neste caso, $X \cap Y = \{0\}$ e $f(X) = f(Y) = [0, 1]$. Logo $f(X \cap Y) = \{f(0)\} = \{0\}$ e $f(X) \cap f(Y) = [0, 1]$.

Questão 4.

(0.5) (a) Se $r \neq 0$ é um número racional, prove que $r\sqrt{2}$ é irracional.

(0.5) (b) Dado qualquer número real $\epsilon > 0$, prove que existe um número irracional α tal que $0 < \alpha < \epsilon$.

(1.0) (c) Mostre que todo intervalo $[a, b]$, com $a < b$, contém algum número irracional.

UMA RESPOSTA

(a) Se $r\sqrt{2}$ é racional, então $r\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, para $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Como $r \neq 0$, podemos dividir por r para obter $\sqrt{2} = \frac{p}{rq}$, de que resulta $\sqrt{2}$ racional, contradição.

(b) Escolha n um número natural maior do que $\frac{\sqrt{2}}{\epsilon}$. Então $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{n}$ é positivo, irracional (pelo item (a)) e

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{n} < \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}/\epsilon} = \epsilon\,.$$

(c) Se a ou b for irracional, não há o que provar. Se a for racional, subtraindo a de todos os números do intervalo $[a, b]$, ficamos com o intervalo $[0, b - a]$. Tomando ϵ igual a $b - a$ no item (b), obtemos o irracional α menor do que $b - a$ e maior do que zero. Então $a + \alpha$ é irracional (se não fosse, então α seria a soma de dois racionais e, portanto, um racional, contradizendo (b)) e pertence ao intervalo $[a, b]$.

Questão 5.

Sejam m e n números naturais primos entre si.

(1.0) (a) Mostre que $\frac{m}{n}$ é equivalente a uma fração decimal (isto é, com denominador potência de 10) se, e somente se, n não tem fatores primos diferentes de 2 ou 5.

(1.0) (b) Mostre que se n tem outros fatores primos além de 2 ou 5 então a expansão decimal é infinita e, a partir de um certo ponto, periódica.

UMA RESPOSTA

(a) Sendo m e n primos entre si, uma fração equivalente a $\frac{m}{n}$ deve ter a forma $\frac{mp}{np}$ (obtida multiplicando-se m e n pelo mesmo número natural p).

Os fatores primos de uma potência de 10 são 2 e 5. Se $\frac{mp}{np}$ é fração decimal para algum p então $np = 10^r$. Logo, np só admite fatores primos iguais a 2 ou 5, e, portanto, n também.

Reciprocamente, se n possui apenas fatores primos iguais a 2 ou 5, então podemos multiplicar n por p de forma que o resultado seja uma potência de 10 (p pode ser ou uma potência de 2 ou uma potência de 5). Com esse p, $\frac{mp}{np}$ é uma fração decimal.

(b) Usando o processo tradicional da divisão continuada para transformar $\frac{m}{n}$ em fração decimal, como há fatores de n diferentes de 2 ou 5, em nenhuma etapa o resto da divisão é zero, logo a expansão nunca termina, ou seja, é infinita. Além disso, os diferentes restos (diferentes de zero) que ocorrem são todos menores do que n, portanto o número deles é no máximo $n - 1$. Assim, algum resto deve repetir-se e, a partir daí, o processo se repete: os restos se sucedem na mesma ordem anterior e, portanto, os quocientes também, o que fornece a periodicidade (observe que o período tem, no máximo, $n - 1$ números).