Questão 1.

Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida como indicado abaixo:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2+3 \\ a_3 &= 4+5+6 \\ a_4 &= 7+8+9+10 \\ \ldots \end{aligned}$$

(0.5) (a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

(0.5) (b) Calcule a_{10}.

(1.0) (c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

UMA RESPOSTA

(a) O primeiro inteiro da soma que define a_n é igual ao número de inteiros utilizados nos termos $a_1, \ldots, a_{n-1}$, isto é, $1+2+\ldots+n-1$ mais um, isto é, é igual a $\frac{1}{2}(n-1)n+1$. O último inteiro é esse número mais $n-1$. Portanto, para $n=10$, o primeiro inteiro é 46 e o último é 55.

(b) a_{10} é a soma de uma progressão aritmética de 10 termos, sendo o primeiro igual a 46 e o último igual a 55. Então

$$a_{10} = \frac{(46+55)\cdot 10}{2} = 101 \cdot 5 = 505\,.$$

(c) No caso de a_n, trata-se da soma de uma progressão aritmética de n termos, sendo o primeiro igual a $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ e o último igual a $\frac{1}{2}n(n-1)+1+(n-1)$, ou seja, $\frac{1}{2}n(n-1)+n$, como visto em (a). Então

$$a_n = \frac{\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right] + \left[\frac{1}{2}n(n-1)+n\right]}{2} \cdot n = \frac{(n-1)n^2+(n+1)n}{2} = \frac{n^3+n}{2}\,.$$

Questão 2.

Um comerciante, para quem o dinheiro vale 5% ao mês, oferece determinado produto por 3 prestações mensais iguais a R$ 100,00, a primeira paga no ato da compra.

(1.0) (a) Que valor o comerciante deve cobrar por esse produto, no caso de pagamento à vista?

(1.0) (b) Se um consumidor desejar pagar o produto em três prestações mensais iguais, mas sendo a primeira paga um mês após a compra, qual deve ser o valor das parcelas?

Utilize, se desejar, os seguintes valores para as potências de $1,05$: $1,05^2 = 1,1025$; $1,05^{-1} = 0,9524$; $1,05^{-2} = 0,9070$.

UMA RESPOSTA

(a) Trazendo os valores da segunda e da terceira prestações para o ato da compra, e somando, obtém-se

$$100 + \frac{100}{1,05} + \frac{100}{1,05^2} = 100 + 95,24 + 90,70 = 285,94\,.$$

Então o comerciante poderá cobrar 285,94 reais, de forma que, se deixar seu dinheiro valorizar 5% ao mês, poderá dispor de 100 reais no ato da compra (tirando 100 reais dos 285,94), 100 reais ao final do primeiro mês (deixando 95,24 reais valorizarem 5% durante um mês) e 100 reais ao final do segundo mês (deixando 90,70 reais valorizarem 5% ao mês durante dois meses).

(b) Para o parcelamento desejado pelo consumidor, as parcelas se deslocam um mês adiante. Então em cada uma das três parcelas de 100 reais devem incidir juros de 5%. Portanto, são 3 parcelas de 105 reais.

Questão 3.

Considere o conjunto dos números escritos apenas com os algarismos 1, 2 e 3, em que o algarismo 1 aparece uma quantidade **par** de vezes (por exemplo, 2322 e 12123). Seja a_n a quantidade desses números contendo exatamente n algarismos.

(0.4) (a) Liste todos esses números para $n = 1$ e $n = 2$, indicando os valores de a_1 e a_2.

(0.8) (b) Explique por que a_n satisfaz a equação de recorrência $a_{n+1} = (3^n - a_n) + 2a_n$, para $n \geq 1$ (note que 3^n é o número total de números com n algarismos iguais a 1, 2 ou 3).

(0.8) (c) Resolva a equação de recorrência em (b).

UMA RESPOSTA

(a) Para $n = 1$ só há três números possíveis: 1, 2 e 3. Somente os dois últimos têm um número par de algarismos iguais a 1 (neste caso, nenhum algarismo igual a 1). Então $a_1 = 2$. Os números de 2 algarismos são: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, num total de $9 = 3^2$. Cinco deles têm uma quantidade par de algarismos iguais a 1, então $a_2 = 5$.

(b) (Antes de fazer o exercício, pode-se verificar se a fórmula está correta para $n = 1$: $5 = a_2 = (3^1 - a_1) + 2a_1 = 3 + a_1 = 3 + 2 = 5$.) Observa-se primeiro que a quantidade de números com n algarismos tendo uma quantidade *ímpar* de algarismos iguais a 1 é $3^n - a_n$, pois o número total de sequências é 3^n.

Para obter a relação de recorrência, observe que todo número de $n + 1$ algarismos é uma concatenação de um número de n algarismos com um número de 1 algarismo. Para que a quantidade de algarismos iguais a 1 do número de $n + 1$ algarismos seja par é preciso que: ou o número de algarismos iguais a 1 de cada um dos números concatenados seja ímpar ou o número de algarismos iguais a 1 de cada um dos números concatenados seja par. Então, para calcular a_{n+1}, soma-se o número de concatenações do primeiro caso (ímpar-ímpar) com o número de concatenações do segundo caso (par-par). Isto dá

$$a_{n+1} = (3^n - a_n) \cdot (3^1 - a_1) + a_n \cdot a_1 ,$$

isto é, a fórmula do enunciado, já que $a_1 = 2$.

(c) Observa-se que $a_{n+1} = a_n + 3^n$, apenas simplificando-se a expressão. Isto implica

$$a_n = a_1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1} = 1 + (1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{n-1}) ,$$

em que a expressão entre parênteses é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica de termo inicial 1 e razão 3, que vale

$$\frac{3^n - 1}{3 - 1} .$$

Portanto

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2} .$$

Questão 4.

(1.0) (a) Mostre, *por indução finita*, que

$$1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}\,.$$

(1.0) (b) Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ progressão geométrica com termo inicial a_1 positivo e razão $r > 1$, e S_n a soma dos n primeiros termos da progressão. Prove, *por indução finita*, que $S_n \leq \frac{r}{r-1} a_n$, para qualquer $n \geq 1$.

UMA RESPOSTA

(a) A equação é verdadeira para $n = 1$, pois $1 \cdot 3^0 = 1$ e

$$\frac{(2 \cdot 1 - 1)3^1 + 1}{4} = 1\,.$$

Supondo válida para n, vamos mostrar que vale para $n+1$, isto é, vamos mostrar que, acrescentando o termo $(n+1) \cdot 3^n$, a soma resultará em

$$\frac{(2(n+1) - 1)3^{n+1} + 1}{4}\,.$$

Usando a hipótese de indução,

$$1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + n \cdot 3^{n-1} + (n+1)3^n = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4} + (n+1)3^n\,.$$

Manipulando a expressão à direita,

$$\frac{(2n-1)3^n + 1}{4} + (n+1)3^n = \frac{[2n - 1 + 4(n+1)]3^n + 1}{4} = \frac{(2n+1)3^{n+1} + 1}{4} = \frac{(2(n+1) - 1)3^{n+1} + 1}{4}\,,$$

como queríamos demonstrar.

(b) Para $n = 1$ a desigualdade é verdadeira: como $r > 1$, então $\frac{r}{r-1} > 1$; e como $S_1 = a_1 > 0$, então $S_1 = a_1 < \frac{r}{r-1} a_1$. Suponha agora que a desigualdade vale para n, isto é, suponha que $S_n \leq \frac{r}{r-1} a_n$ é verdadeira. Vamos provar que ela vale para $n+1$, isto é, vamos provar que $S_{n+1} \leq \frac{r}{r-1} a_{n+1}$. Primeiro, escrevemos $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, pois S_{n+1} é a soma dos primeiros n termos adicionada do termo $n+1$. Usando a hipótese de indução, $S_{n+1} \leq \frac{r}{r-1} a_n + a_{n+1}$. Como se trata de uma progressão geométrica $a_{n+1} = r a_n$, ou seja, podemos trocar a_n por $\frac{a_{n+1}}{r}$. Então $S_{n+1} \leq \frac{r}{r-1} \cdot \frac{a_{n+1}}{r} + a_{n+1}$, isto é, $S_{n+1} \leq (\frac{1}{r-1} + 1) a_{n+1} = \frac{r}{r-1} a_{n+1}$, que é o que queríamos demonstrar.

Questão 5.

Seja $(x_n)_{n\geq 0}$ sequência definida pela relação de recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com termo inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.

(0.5) (a) Encontre x_0 tal que a sequência seja constante e igual a um número real a.

(1.0) (b) Resolva a recorrência com a substituição $x_n = y_n + a$, em que a é valor encontrado em (a).

(0.5) (c) Para que valores de x_0 a sequência é crescente? Justifique.

UMA RESPOSTA

(a) Basta achar a tal que $2a + 1 = a$. Isto dá $a = -1$. Se $x_0 = a$ então $x_1 = 2x_0 + 1 = 2a + 1 = a = x_0$, e, da mesma forma, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$, ..., $x_{n+1} = x_n$ para qualquer $n \geq 0$, ou seja, a sequência é constante.

(b) Com a substituição sugerida, $x_n = y_n - 1$. Então $y_{n+1} - 1 = 2(y_n - 1) + 1$, isto é, $y_{n+1} = 2y_n$, com $y_0 = x_0 + 1$. Então $y_n = 2^n y_0 = 2^n(x_0 + 1)$ e $x_n = y_n - 1 = -1 + 2^n(x_0 + 1)$.

(c) Se $x_0 + 1 > 0$, isto é, $x_0 > -1$, então $2^n(x_0 + 1)$ é crescente e $x_n = -1 + 2^n(x_0 + 1)$ é crescente. Se $x_0 + 1 < 0$, isto é $x_0 < -1$, então $x_n = -1 + 2^n(x_0 + 1) = -1 - 2^n|x_0 + 1|$ é descrescente. E se $x_0 = -1$ então x_n é constante. De onde se conclui que x_n é crescente se, e somente se, $x_0 \in (-1, +\infty)$.