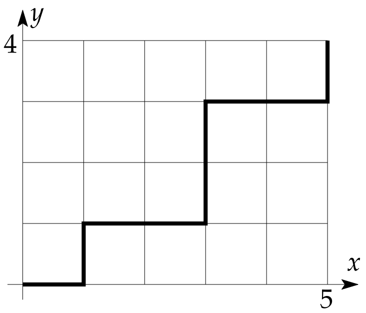
Questão 1.

Considere os caminhos no plano iniciados no ponto $(0,0)$ com deslocamentos paralelos aos eixos coordenados, sempre de uma unidade e no sentido positivo dos eixos x e y (não se descarta a possibilidade de dois movimentos unitários seguidos na mesma direção, ver ilustração mostrando um caminho que termina em $(5,4)$).



(1,0) (a) Explique por que o número de caminhos que terminam no ponto (m,n) é C^m_{m+n}.

(1,0) (b) Quantos são os caminhos que terminam no ponto $(8,7)$, passam por $(2,3)$ mas não passam por $(5,4)$?

UMA SOLUÇÃO

(a) Chamaremos de horizontais os movimentos paralelos ao eixo x e de verticais os paralelos ao eixo y. Como todos os movimentos são positivos e unitários, são necessários m movimentos horizontais e n movimentos verticais para se chegar em (m,n), totalizando $m+n$ movimentos. Um caminho fica totalmente determinado se dissermos quais desses $m+n$ movimentos são, digamos, movimentos horizontais. Portanto, precisamos saber de quantas maneiras podemos escolher m movimentos horizontais entre os $m+n$ movimentos do caminho. Isso dá C^m_{m+n}.

Evidentemente poderíamos ter determinado os caminhos dizendo quais são os n movimentos horizontais dentre os $m+n$ movimentos. Esse raciocínio nos levaria a C^n_{m+n}. Mas $C^n_{m+n} = C^m_{m+n}$.

(b) Se um caminho até $(8,7)$ é obrigado a passar por $(2,3)$ então ele é a junção de um caminho que vai de $(0,0)$ a $(2,3)$ com um caminho que vai de $(2,3)$ a $(8,7)$. No entanto, queremos que o caminho que vai de $(2,3)$ a $(8,7)$ não passe por $(5,4)$, ou seja, queremos que ele vá de $(2,3)$ a $(8,7)$ sem ser a junção de um caminho de $(2,3)$ a $(5,4)$ com um caminho de $(5,4)$ a $(8,7)$. Isso nos indica que precisamos calcular quantos caminhos temos de $(0,0)$ a $(2,3)$, quantos de $(2,3)$ a $(5,4)$ e quantos de $(5,4)$ a $(8,7)$.

Segundo o item anterior, há $C^2_{2+3} = C^2_5$ maneiras de ir de $(0,0)$ a $(2,3)$. Há $C^3_{3+1} = C^3_4$ maneiras de se ir de $(2,3)$ a $(5,4)$, pois são necessários 3 movimentos horizontais e 1 vertical. Há $C^3_{3+3} = C^3_6$ maneiras de se ir de $(5,4)$ a $(8,7)$, pois são necessários 3 movimentos horizontais e 3 verticais. E há C^6_{10} maneiras de se ir de $(2,3)$ a $(8,7)$, pois são necessários 6 movimentos horizontais e 4 verticais.

Há, portanto, $C^3_4 \cdot C^3_6$ maneiras de se ir de $(2,3)$ a $(8,7)$ passando por $(5,4)$. Então há $C^6_{10} - C^3_4 \cdot C^3_6$ maneiras de se ir de $(2,3)$ a $(8,7)$ sem passar por $(5,4)$. E, por conseguinte, há

$$N = C^2_5 \cdot (C^6_{10} - C^3_4 \cdot C^3_6)$$

maneiras de se ir de $(0,0)$ a $(8,7)$ passando por $(2,3)$ mas não passando por $(5,4)$.

Para termos um número, calculamos essas combinações: $C_5^2 = \frac{5!}{3!}2! = 10$, $C_{10}^6 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210$, $C_4^3 = 4$ e $C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 20$. Então

$$N = 10 \cdot (210 - 4 \cdot 20) = 1300\,.$$

Questão 2.

Os professores de seis disciplinas (entre as quais Português e Matemática) devem escolher um dia, de segunda a sexta, de uma única semana para a realização da prova de sua disciplina. Suponha que cada professor escolha o seu dia de prova ao acaso, sem combinar com os demais professores.

(1,0) (a) Qual é a probabilidade de que as provas de Português e Matemática sejam realizadas no mesmo dia?

(1,0) (b) Qual é a probabilidade de que os alunos façam provas em todos os dias da semana?

UMA SOLUÇÃO

(a) Nesta questão, não é preciso olhar para as outras disciplinas. Há 5 possibilidades para o dia de prova de Português e 5 possibilidades para o dia de prova de Matemática. Portanto, há 25 possibilidades para o par de provas Português e Matemática. Dessas 25, apenas 5 são ocorrências de Português e Matemática no mesmo dia (uma ocorrência para cada dia da semana). Então a probabilidade de que essas duas provas ocorram no mesmo dia é $5/25 = 0,2$ (ou 20%).

Outra maneira de pensar: fixado o dia da prova de Matemática, há 5 possibilidades para o dia de Português, e apenas uma delas é no mesmo dia que Matemática. Isso dá os mesmos 20% de chances.

(b) Vamos contar de quantas maneiras se distribuem 6 provas nos 5 dias da semana sem deixar um dia livre. Com essa imposição, certamente um dia terá duas provas e os demais dias terão apenas uma. Então começamos escolhendo entre as 5 possibilidades para o dia da semana que terá duas provas. Escolhido esse dia, temos que escolher duas das seis disciplinas para preenchê-lo. Temos C_6^2 escolhas. Escolhidas essas duas disciplinas, ainda restam 4 para distribuir nos 4 dias: são 4! escolhas. Portanto há $5 \cdot C_6^2 \cdot 4!$ maneiras de se distribuir 6 provas em 5 dias sem deixar um dia livre.

Agora precisamos do total de maneiras de se distribuir as 6 provas durante a semana. Cada disciplina tem 5 escolhas, então são 5^6 possibilidades.

Então a probabilidade de não ficar um dia livre é o quociente

$$\frac{5 \cdot C_6^2 \cdot 4!}{5^6} = \frac{5! \cdot 15}{5^6} = 4! \cdot 35^4 = \frac{72 \cdot 16}{10000} = \frac{1152}{10000} = 0,1152\,,$$

ou 11,52%.

Questão 3.

Em um jogo, uma moeda honesta é jogada seguidamente. Cada vez que sai cara, o jogador ganha 1 real; cada vez que sai coroa, o jogador ganha 2 reais. O jogo termina quando o jogador tiver acumulado 4 ou mais reais.

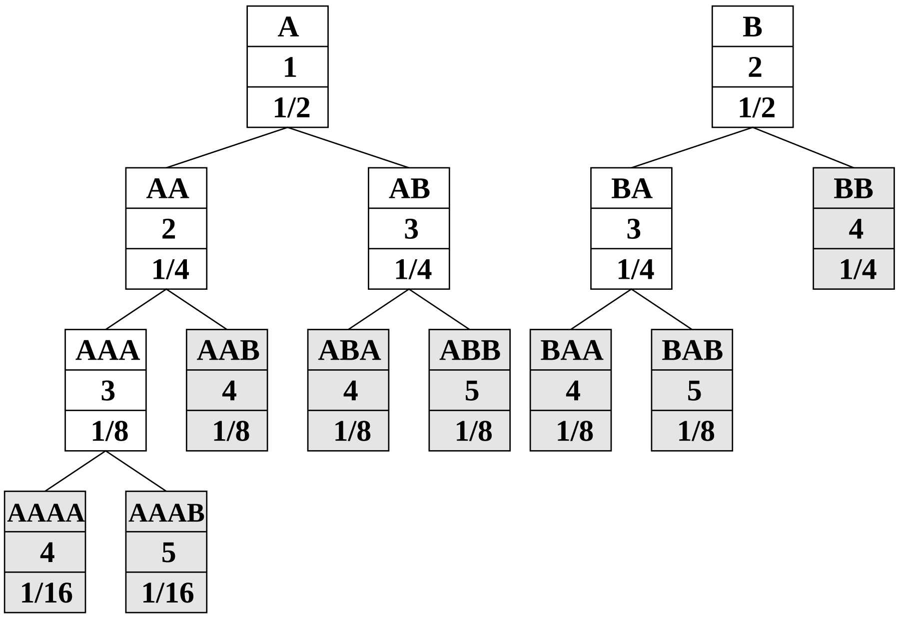
(0,5) (a) Qual é a probabilidade de que o jogador ganhe exatamente 4 reais?

(0,5) (b) Qual é a probabilidade de que no último lançamento saia cara?

(1,0) (c) Dado que o jogador ganhou exatamente 4 reais, qual é a probabilidade de que tenha saído cara no último lançamento?

UMA SOLUÇÃO

Nesta questão, convém fazer primeiro a árvore das possibilidades. Indicaremos "cara" por A e "coroa" por B. Em cada nó da árvore, indicamos a sequência obtida (linha superior), o valor acumulado pelo jogador (linha do meio) e a probabilidade daquela sequência (linha inferior). Os nós em cinza são aqueles em que o jogo termina. Veja que a soma das probabilidades em cada nó pintado em cinza é igual a 1, e que a probabilidade indicada em cada um é a probabilidade de o jogo terminar com aquela sequência.



(a) Para ver a probabilidade de que o jogador termine com exatamente 4 reais, basta somar as probabilidades dos nós em cinza que têm ganho de 4 reais. São eles: AAAA (1/16), AAB (1/8), ABA (1/8), BAA (1/8) e BB (1/4). A soma é $\frac{11}{16}$.

(b) O jogo termina com cara em todos os nós em cinza que terminam com a letra A. Então basta somar as probabilidades de cada caso. São eles AAAA (1/16), ABA (1/8) e BAA (1/8), o que dá $\frac{5}{16}$.

(c) Das situações em que o jogador terminou com 4 reais, listadas em (a), que têm probabilidade de 11/16 de ocorrer, apenas AAAA, ABA e BAA terminam com A (cara), com probabilidade de 5/16. Então a probabilidade de se terminar com cara dado que o jogador terminou com 4 reais é $\frac{5/16}{11/16} = \frac{5}{11}$.

Questão 4.

Uma prova de concurso é formada por questões de múltipla escolha, com 4 alternativas por questão. Admita que nenhum candidato deixe questões sem responder.

(1,0) (a) Qual é o número mínimo de candidatos para que seja possível garantir que pelo menos 3 deles darão exatamente as mesmas respostas nas 5 primeiras questões?

(1,0) (b) Qual é o valor máximo de n para o qual é possível garantir que, em um concurso com 1000 candidatos, pelo menos 2 darão as mesmas respostas nas primeiras n questões?

UMA SOLUÇÃO

(a) O conjunto de possibilidades de respostas para as 5 primeiras questões, cada uma com 4 alternativas, é 4^5. É possível distribuir as respostas de $2 \cdot 4^5 = 2048$ candidatos de forma que cada conjunto de respostas se repita exatamente duas vezes, mas se houver $2 \cdot 4^5 + 1 = 2049$ candidatos isso não é mais possível, sempre haverá ao menos 3 provas iguais nas cinco primeiras questões.

(b) Considerando agora as n primeiras questões, há 4^n possibilidades de resposta. Para garantir que em 1000 candidatos pelo menos 2 respondam de forma igual a essas primeiras n questões, é necessário que $1000 \geq 4^n + 1$, isto é, $4^n \leq 999$. O valor máximo de n tal que $4^n \leq 999$ é 4 (pois $4^4 = 2^8 = 256$ e $4^5 = 2^{10} = 1024$). Resposta: $n = 4$.

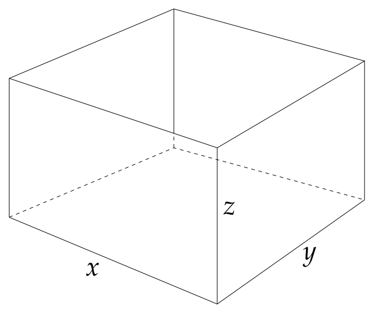
Questão 5.

Uma caixa retangular sem tampa tem arestas medindo x, y e z (veja figura, onde as linhas tracejadas indicam segmentos de arestas obstruídos por alguma face).

(0,5) (a) Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.

(1,0) (b) Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior ou igual a 48.

(0,5) (c) Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.



UMA SOLUÇÃO

(a) A área da caixa é igual a $xy + 2xz + 2yz$ e seu volume é igual a xyz.

(b) A soma $xy + 2xz + 2yz$ é igual a 3 vezes a média aritmética simples de seus termos. Essa média é sempre maior do que ou igual à média geométrica dos mesmos termos, isto é

$$\frac{1}{3}(xy + 2xz + 2yz) \geq \sqrt[3]{xy \cdot 2xz \cdot 2yz} = \sqrt[3]{4x^2y^2z^2}\,.$$

Supondo $xyz = 32$ (que é dado no problema), resulta que $\sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot (2^5)^2} = \sqrt[3]{2^{12}} = 16$. Então, multiplicando por 3 dos dois lados, $xy + 2xz + 2yz \geq 48$.

(c) A igualdade entre as médias aritmética e geométrica ocorre se, e somente se, os termos são iguais. Neste caso, quando $xy = 2xz = 2yz$. Como o volume é positivo, x, y, z têm que ser positivos, em particular não nulos. Então, da equação $2xz = 2yz$ tiramos $y = x$, e da equação $xy = 2yz$ tiramos $z = \frac{x}{2}$. Como $xyz = 32$ então $x \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 32$, isto é, $x^3 = 64 = 2^6$, ou ainda $x = 4$. Então $x = y = 4$ e $z = 2$.