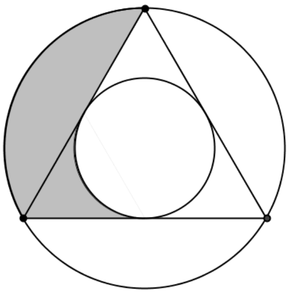
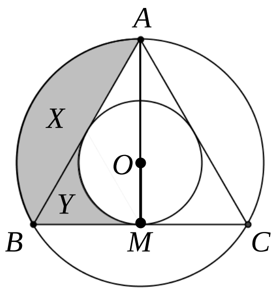
Questão 1

(2,0) A figura abaixo mostra um triângulo equilátero e suas circunferências inscrita e circunscrita. A circunferência menor tem raio 1.
Calcule a área da região sombreada.



Uma solução:



Seja *O*, o centro do triângulo equilátero *ABC* e seja *M* o ponto médio do lado *BC* como na figura acima. Pela propriedade do baricentro do triângulo, $OA = 2 \cdot OM$ e como $OM = 1$ temos $OA = 2$.

A região cuja área se pede é formada por duas partes justapostas *X* e *Y* como mostra a figura. Observando que $3X + 3Y$ é a área da coroa circular formada pelas duas circunferências temos $3(X + Y) = \pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2 = 3\pi$.

Logo, $X + Y = \pi$.

Questão 2

O poliedro P que inspirou a bola da Copa de 70 é formado por faces pentagonais e hexagonais, e é construído da seguinte forma:

•Considere um icosaedro regular de aresta a (Fig. 1 abaixo).

•A partir de um vértice e sobre cada uma das 5 arestas que concorrem nesse vértice, assinale os pontos que estão a uma distância de $\frac{a}{3}$ desse vértice. Esses 5 pontos formam um pentágono regular (Fig. 2).

•Retirando a pirâmide de base pentagonal que ficou formada obtemos a Fig. 3.

•Repetindo a mesma operação para todos os vértices do icosaedro obtém-se o poliedro P.

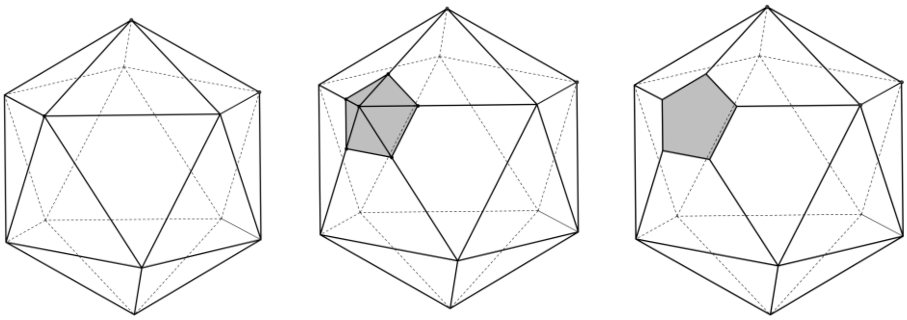


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

(0,5) (a) Determine quantas são as faces pentagonais e quantas são as faces hexagonais de P.

(0,7) (b) Determine os números de arestas, faces e vértices de P.

(0,8) (c) Sabendo que uma diagonal de um poliedro é todo segmento que une dois vértices que não estão na mesma face, determine o número de diagonais de P.

Uma solução:

(a) Cada face pentagonal de P apareceu onde havia um vértice do icosaedro. Como o icosaedro tem 12 vértices então P tem 12 faces pentagonais. Cada face (triangular) do icosaedro deu origem a uma face hexagonal de P. Como o icosaedro tem 20 faces triangulares então P tem 20 faces hexagonais.

(b) Do item anterior temos $F_5 = 12$ e $F_6 = 20$

O número total de faces de P é $F = F_5 + F_6 = 12 + 20 = 32$.

Contando as arestas temos: $2A = 5F_5 + 6F_6 = 5 \cdot 12 + 6 \cdot 20 = 180$, ou seja, $A = 90$.

Como P é convexo então vale a relação de Euler $V - A + F = 2$. Portanto, $V = 60$.

(c) Seja d_n o número de diagonais de um polígono de n lados.

O número de diagonais de um pentágono é $d_5 = 5$ e o de um hexágono é $d_6 = 9$.

A soma dos números de diagonais de todas as faces é $S = F_5 \cdot d_5 + F_6 \cdot d_6 = 12 \cdot 5 + 20 = 240$.
Vamos agora construir todos os segmentos cujas extremidades são os V vértices do poliedro P.
A quantidade de diagonais de P é $D = C_V^2 - A - S$.
Assim, $D = C_{60}^2 - 90 - 240 = \dfrac{60 \cdot 59}{2} - 90 - 240 = 1170 - 330 = 1440.$

Questão 3

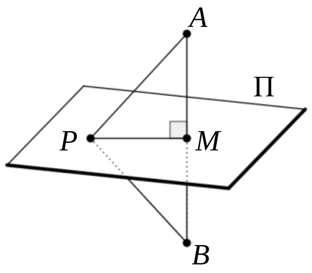
Definição: Dado um segmento *AB*, o *plano mediador* desse segmento é o plano perpendicular a *AB* que contém o seu ponto médio.

1ª Parte

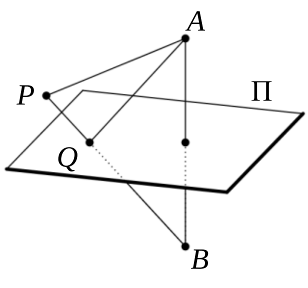
(2,0) Prove que um ponto *P* equidista de dois pontos *A* e *B* se, e somente se, pertence ao plano mediador de *AB*.

Uma solução:

Seja *M* o ponto médio de *AB* e seja Π o plano mediador de *AB*.



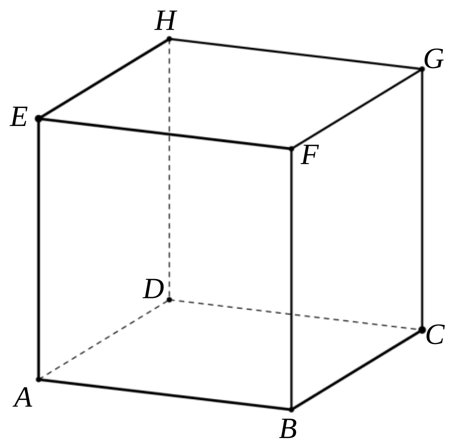
(a) Suponha que *P* pertença a Π. Se *P* coincide com *M* então equidista de *A* e *B*. Se não, como *AB* é perpendicular a Π então *AB* é perpendicular a *MP*. Como *M* é médio de *AB* então os triângulos retângulos *MPA* e *MPB* são congruentes.
Logo, $PA = PB$, ou seja, *P* equidista de *A* e *B*.



(b) Suponha que *P* não pertença a Π. Imaginemos, por exemplo e sem perda de generalidade, os pontos *P* e *A* no mesmo semiespaço determinado por Π. Como *B* está no semiespaço oposto a reta *PQ* corta Π em um ponto *Q*. Como $Q \in \Pi$ então, pela parte a), $QA = QB$.
No triângulo *PAQ* tem-se: $PA < PQ + QA = PQ + QB = PB$.
Assim, *P* não equidista de *A* e *B*.

2ª Parte

A figura abaixo mostra o cubo *ABCD-EFGH* de aresta *a*. Sejam *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* e *S* os pontos médios das arestas *AB*, *BF*, *FG*, *GH*, *HD* e *DA*.



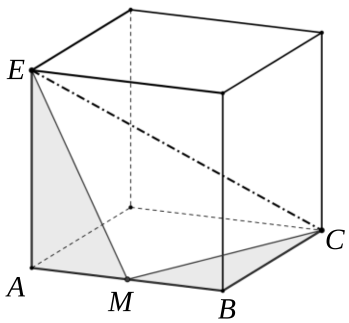
(0,5) (a) Mostre que esses seis pontos são coplanares.

Sugestão: Mostre que qualquer um deles pertence ao plano mediador da diagonal *EC* do cubo (a propriedade enunciada na primeira parte da questão pode ser utilizada mesmo que você não a tenha demonstrado).

(0,5) (b) Mostre que o hexágono *MNPQRS* é regular.

(1,0) (c) Calcule o volume da pirâmide de vértice *E* e base *MNPQRS*.

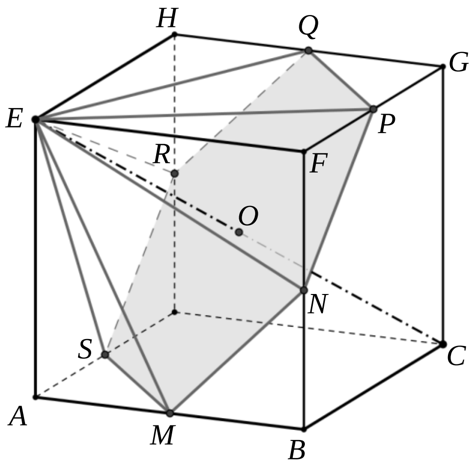
Uma solução:



(a) Tomemos o ponto *M*, médio da aresta *AB*. Os triângulos *AME* e *BMC* são congruentes, pois $AM = BM$, $AE = BC$ e $\angle MAE = \angle MBC = 90^0$

Logo, $ME = MC$ e, portanto, *M* pertence ao plano mediador da diagonal *EC*.

Analogamente, cada um dos outros pontos: *N*, *P*, *Q*, *R* e *S* também estão nesse mesmo plano.



(b) Cada lado do hexágono é a metade da diagonal de uma face. Por exemplo, $NP = \dfrac{BG}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Seja *O*, o centro do cubo. Todos os vértices do hexágono possuem mesma distância ao ponto *O*. A distância do centro do cubo a qualquer aresta é a metade da diagonal de uma face, ou seja, $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, cada um dos triângulos *MON*, *NOP*, ..., *SOM* é equilátero e o hexágono é regular.

(c) A área do hexágono é $6 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$.

Como a altura da pirâmide é a metade da diagonal do cubo temos $OE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

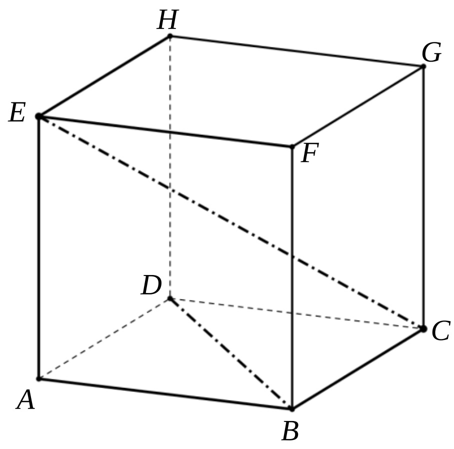
O volume da pirâmide é: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3a^3}{8}$.

3ª Parte

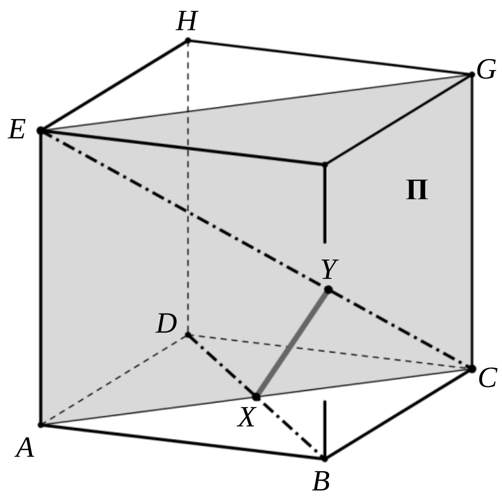
A figura abaixo mostra o cubo *ABCD-EFGH* de aresta *a*.

(1,0) (a) Mostre que as retas *DB* e *EC* são ortogonais.

(1,0) (b) Calcule o comprimento da perpendicular comum entre *DB* e *EC*.



Uma solução:



(a) Seja Π o plano diagonal *AEGC*.
Como *AE* é perpendicular ao plano *ABCD* então *AE* é ortogonal a *BD*. Mas *AC* é perpendicular a *BD* (pois as diagonais de um quadrado são perpendiculares. Como *BD* é ortogonal a *AE* e *AC* então *BD* é perpendicular a Π.
Como *EC* está contida em Π então *BD* é ortogonal a *EC*.

(b) Seja *X* o ponto onde *BD* fura o plano Π. O ponto *X* é o centro da face *ABCD*.
Sobre o plano Π tracemos *XY* perpendicular a *EC*.
Lembrando que *BD* é perpendicular a Π então *BD* é perpendicular a *XY*. Assim, *XY* é a perpendicular comum entre *BD* e *EC*.

Os triângulos retângulos *CYX* e *CAE* são semelhantes. Logo,

$$\frac{XY}{AE} = \frac{CX}{CE} \quad \rightarrow \quad \frac{XY}{a} = \frac{a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad XY = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$