Questão 1 [1,0 pt]

O máximo divisor comum de dois inteiros positivos é 20. Para se chegar a esse resultado pelo processo das divisões sucessivas, os quocientes encontrados foram, pela ordem, 1, 5, 3, 3, 1 e 3. Encontre os dois números.

Solução

Utilizando o processo das divisões sucessivas, para os inteiros positivos a, b, obtém-se:

- $a = b \cdot 1 + r$; $0 < r < b$
- $b = r \cdot 5 + r_1$; $0 < r_1 < r$
- $r = r_1 \cdot 3 + r_2$; $0 < r_2 < r_1$
- $r_1 = r_2 \cdot 3 + r_3$; $0 < r_3 < r_2$
- $r_2 = r_3 \cdot 1 + r_4$; $0 < r_4 < r_3$
- $r_3 = r_4 \cdot 3$

Portanto, $r_4 = (a, b) = 20$ e $r_3 = 60$. Substituindo esses valores nas equações anteriores encontra-se $a = 6180$ e $b = 5200$.

Pauta de correção

- Demonstrar saber o que é o processo das divisões sucessivas [0,25]
- Realizar todas as etapas do processo para este caso [0,25]
- Encontrar os valores corretos dos restos [0,25]
- Obter os valores corretos de a e b [0,25]

Questão 2 [1,0 pt ::: (a)=0,5; (b)=0,5]

Dado um polígono regular convexo de n lados inscrito em um círculo de raio R, seja l_n o comprimento dos lados e seja a_n a distância do centro do círculo aos lados do polígono (a_n é o *apótema* do polígono).

(a) Calcule l_{12} e a_{12} em função de R.

(b) Use o item (a) para obter o valor de tg 75°.

Solução

(a) Dados um círculo de raio R e um dodecágono regular nele inscrito, considere um triângulo cujos lados sejam dois raios do círculo e um dos lados do dodecágono. Este triângulo tem dois lados de medida R e um de medida l_{12}. O ângulo do triângulo oposto ao lado de medida l_{12} é central, correspondendo a um arco de medida $360°/12 = 30°$. Assim, pela lei dos cossenos,

$$(l_{12})^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 30°,$$

logo,

$$(l_{12})^2 = R^2(2-\sqrt{3}),$$

e, com isso,

$$l_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

A altura do triângulo considerado acima, relativa ao lado de medida l_{12}, tem medida a_{12}, e divide o triângulo em dois triângulos retângulos cujos catetos medem a_{12} e $l_{12}/2$, e cuja hipotenusa é R. Assim,

$$R^2 = \left(\frac{l_{12}}{2}\right)^2 + (a_{12})^2,$$

logo,

$$\begin{aligned} (a_{12})^2 &= R^2 - \left(\frac{l_{12}}{2}\right)^2 \\ &= R^2 - R^2 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ &= R^2 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a_{12} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

(b) O primeiro triângulo considerado no item (a), é isósceles e tem o ângulo do vértice de medida $30°$. Logo, seus outros dois ângulos medem $75°$. O triângulo retângulo utilizado em (a) para o cálculo de a_{12} tem então catetos adjacente e oposto de medidas

$$l_{12}/2 = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad \text{e} \quad a_{12} = \frac{R\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},$$

respectivamente. Assim,

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{a_{12}}{l_{12}/2} = \frac{(R\sqrt{2+\sqrt{3}})/2}{(R\sqrt{2-\sqrt{3}})/2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Multiplicando numerador e denominador da expressão acima por $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, obtém-se

$$\operatorname{tg} 75° = 2+\sqrt{3}.$$

Pauta de correção

Item (a)

- Encontrar o valor correto de l_{12} [0,25]
- Encontrar o valor correto de a_{12} [0,25]

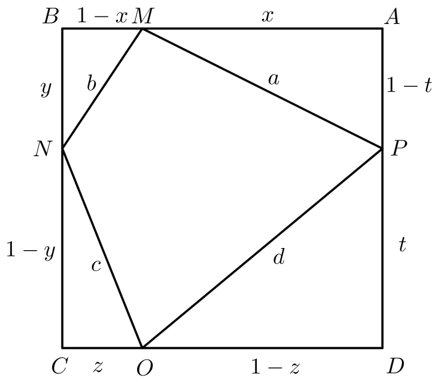
Item (b)

- Identificar triângulo retângulo com ângulo interno de $75°$ [0,25]
- Obter o valor correto de $\operatorname{tg} 75°$ [0,25]

Questão 3 [1,0 pt]

Um quadrilátero tem os seus vértices sobre cada um dos lados de um quadrado, cujo lado tem medida 1. Sabendo que as medidas dos lados desse quadrilátero são a, b, c e d, prove que

$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$



Solução

Denote por $ABCD$ o quadrado de lado 1 e por $MNOP$ o quadrilátero inscrito no quadrado tal que $\overline{PM} = a, \overline{MN} = b, \overline{NO} = c$ e $\overline{OP} = d$, conforme mostra a figura.

Denote ainda por $x = \overline{AM}, y = \overline{BN}, z = \overline{CO}$ e $t = \overline{DP}$. Como o quadrado $ABCD$ tem lado 1, tem-se que $\overline{MB} = 1-x, \overline{CN} = 1-y, \overline{OD} = 1-z$ e $\overline{PA} = 1-t$. Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos AMP, MBN, NCO e ODP, conclui-se que

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + (1-t)^2, \\ b^2 &= (1-x)^2 + y^2, \\ c^2 &= (1-y)^2 + z^2, \\ d^2 &= (1-z)^2 + t^2. \end{aligned}$$

Somando, obtém-se

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= [x^2 + (1-x)^2] + [y^2 + (1-y)^2] \\ &\quad + [z^2 + (1-z)^2] + [t^2 + (1-t)^2] \\ &= (2x^2 - 2x + 1) + (2y^2 - 2y + 1) \\ &\quad + (2z^2 - 2z + 1) + (2t^2 - 2t + 1) \\ &= f(x) + f(y) + f(z) + f(t), \end{aligned}$$

onde $f(x) = 2x^2 - 2x + 1,\ x \in [0,1]$. Agora é necessário calcular os valores de máximo e mínimo da função $f(x) = 2x^2 - 2x + 1,\ x \in [0,1]$. Visto que f é uma função quadrática de coeficiente líder positivo, o valor mínimo ocorre no vértice (desde que esse vértice esteja dentro do intervalo) e o valor máximo ocorre em um dos extremos do intervalo. Como $f(0) = f(1) = 1$, a simetria da parábola assegura que o vértice está dentro do intervalo e ocorre em $x = 1/2$. Como $f(1/2) = 1/2$, obtém-se que

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1,\ \forall\ x \in [0,1].$$

Desta forma, como $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f(x) + f(y) + f(z) + f(t)$, conclui-se que

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Pauta de correção

- Perceber que as medidas a, b, c e d são hipotenusas de triângulos retângulos e usar o Teorema de Pitágoras: [0,25].
- Perceber que a soma $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ pode ser escrita da forma $f(x) + f(y) + f(z) + f(t)$, onde $f(u) = 2u^2 - 2u + 1$: [0,5]
- Usar máximos e mínimos de funções quadráticas no intervalo $[0,1]$ para concluir as desigualdades: [0,25].

Questão 4 [1,0 pt ::: (a)=0,5; (b)=0,5]

De uma caixa contendo 50 bolas numeradas de 1 a 50 retiram-se duas bolas, sem reposição. Determine a probabilidade de:

(a) o número da primeira bola ser divisível por 3 e o número da segunda bola ser divisível por 5.

(b) o número da primeira bola ser divisível por 4 ou o número da segunda bola ser divisível por 6.

Solução

(a) Das 50 bolas numeradas que constam na caixa, 16 bolas correspondem a números divisíveis por 3 e 10 bolas correspondem a números divisíveis por 5. Entretanto há 3 bolas (15, 30 e 45) que correspondem a números divisíveis por 15, sendo, portanto, divisíveis tanto por 3 quanto por 5.
O evento retirar da caixa duas bolas, sem reposição, de modo que o número da primeira seja divisível por 3 e da segunda seja divisível por 5, pode ser distribuído em dois eventos:
Evento A: O número da primeira bola é divisível por 3, mas não por 5, e o número da segunda bola é divisível por 5:

$$P(A) = \frac{13}{50} \times \frac{10}{49} = \frac{130}{2450}$$

Evento B: O número da primeira bola é divisível por 3 e também por 5, e o número da segunda bola é divisível por 5:

$$P(B) = \frac{3}{50} \times \frac{9}{49} = \frac{27}{2450}$$

Assim, a probabilidade de o número da primeira bola ser divisível por 3 e o da segunda ser divisível por 5 é $\frac{157}{2450}$.

(b) Das 50 bolas numeradas que constam na caixa, 12 bolas correspondem a números divisíveis por 4 e 8 bolas compreendem a números divisíveis por 6. Entretanto há 4 bolas (12, 24, 36 e 48) que compreendem a números divisíveis por 12, sendo, portanto, divisíveis tanto por 4 quanto por 6.
A probabilidade de retirar da caixa duas bolas, sem reposição, de modo que o número da primeira seja divisível por 4 ou o da segunda seja divisível por 6, pode ser calculada retirando-se da probabilidade total a probabilidade do evento *o número da primeira bola não ser divisível por 4 e o da segunda não ser divisível por 6*, que **não** satisfaz a condição inicial apresentada . Tal evento deve ser analisado sob dois outros eventos que o compõem:
Evento C: O número da primeira bola não é divisível por 4 mas é divisível por 6, e o número da segunda bola não é divisível por 6:

$$P(C) = \frac{4}{50} \times \frac{42}{49} = \frac{168}{2450} = \frac{84}{1225}$$

Evento D: O número da primeira bola não é divisível por 4 e nem é divisível por 6, e o número da segunda bola não é divisível por 6:

$$P(D) = \frac{34}{50} \times \frac{41}{49} = \frac{1394}{2450} = \frac{697}{1225}$$

Desse modo, a probabilidade de o número da primeira bola não ser divisível por 4 e o da segunda não ser divisível por 6 é $\frac{781}{1225}$. Logo, a probabilidade de retirar da caixa duas bolas, sem reposição, de modo que o número da primeira seja divisível por 4 ou o da segunda seja divisível por 6 é:

$$1 - \frac{781}{1225} = \frac{444}{1225}$$

Pauta de correção

Item (a)

- Calcular corretamente a probabilidade de um dos dois eventos (A ou B) [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade do outro evento e encontrar a resposta correta [0,25]

Item (b)

- Calcular corretamente a probabilidade de um dos dois eventos (C ou D) [0,25]
- Calcular corretamente a probabilidade do outro evento e encontrar a resposta correta [0,25]

Questão 5 [1,0 pt]

Para todo n inteiro positivo, seja

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \ .$$

Prove, por indução em n, que $n + H_1 + \cdots + H_{n-1} = nH_n$, para todo $n \geq 2$.

Solução

Seja $P(n)$ a proposição: $n + H_1 + \cdots + H_{n-1} = nH_n$, para todo $n \geq 2$.

Para $n = 2$ temos que $2 + H_1 = 2 + 1 = 3 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2H_2$.

Suponha agora que $P(n)$ é verdadeira para $n = k$, ou seja,

$k + H_1 + \cdots + H_{k-1} = kH_k$.

Resta provar que $P(n)$ continua válida para $n = k + 1$.

De fato, $(k+1) + H_1 + \cdots + H_{k-1} + H_{(k+1)-1} = (k + H_1 + \cdots + H_{k-1}) + H_k + 1 =$

$kH_k + H_k + 1 = (k+1)H_k + 1 = (k+1)\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) = (k+1)H_{k+1}$

e assim $P(k+1)$ é verdadeira.

Pauta de correção

- Provar para $n = 2$ [0,25]
- Provar para $n = k + 1$ [0,75]

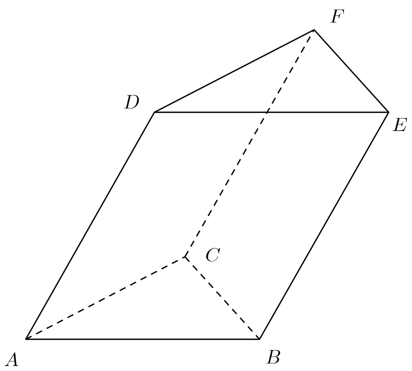
Questão 6 [1,0 pt ::: (a)=0,25; (b)=0,75]

Considere o prisma $ABCDEF$ de bases triangulares da figura.

(a) Mostre que os tetraedros $ABCE$ e $CDEF$ têm o mesmo volume.

(b) Mostre também que os tetraedros $CDEF$ e $ACDE$ têm o mesmo volume e conclua que o volume de um tetraedro é a terça parte do produto da área da base pela altura.

Informação: Assuma o fato de que dois tetraedros com bases de mesma área e alturas congruentes têm volumes iguais.



Solução

(a) Considerando o tetraedro $ABCE$ com base ABC, sua altura é igual à do prisma. Considerando $CDEF$ com base DEF, sua altura também é igual à do prisma. Como ABC e DEF são congruentes, pela definição de prisma, as bases dos tetraedros têm mesma área. Como as alturas são congruentes, $ABCE$ e $CDEF$ têm mesmo volume.

(b) Como $ACDF$ é um paralelogramo, os triângulos ACD e CDF são congruentes, logo têm mesma área. Observe que estes dois triângulos estão contidos em um mesmo plano π. Considerando ACD como base de $ACDE$, a altura deste tetraedro é a distância de E a π. Sendo CDF a base de $CDEF$, a altura é a distância de B a π. Mas, pela definição de prisma, BE é paralelo a π, logo, as distâncias de B e E a π são iguais, e, então, os tetraedros têm mesma altura. Como a área da base é igual, os volumes são iguais.

O volume do prisma é dado por $\text{Área}(ABC) \cdot h$, onde h é sua altura. Os volumes dos três tetraedros $ABCE$, $CDEF$ e $ACDE$, nos quais o prisma pode ser decomposto, são iguais, logo

$$\begin{aligned}\text{Área}(ABC) \cdot h &= \text{Volume}(ABCE) + \text{Volume}(CDEF) + \text{Volume}(ACDE) \\ &= 3\text{Volume}(ABCE),\end{aligned}$$

logo $\text{Volume}(ABCE) = \frac{1}{3}\text{Área}(ABC) \cdot h$.

Pauta de correção

Item (a)

- Concluir a igualdade dos volumes, utilizando que as bases ABC e DEF são congruentes e que as alturas relativas a estas bases são iguais [0,25]

Item (b)

- Perceber um dos seguintes fatos: [0,25]
  - que as bases ACD e CDF têm a mesma área;
  - que a altura de $ACDE$ relativa ao vértice E é congruente à altura de $CDEF$ relativa a E.
- Perceber o outro desses dois fatos e concluir a igualdade dos volumes [0,25]
- Concluir que o volume do tetraedro é um terço do volume do prisma, utilizando a decomposição do prisma nos tetraedros $ACDE$, $CDEF$ e $ABCE$ e o fato de que têm mesmo volume. [0,25]

Questão 7 [1,0 pt]

Mostre que $a^7 \equiv a \bmod 21$, para todo inteiro a.

Solução

Seja a um inteiro qualquer. Observe que $21 = 3 \times 7$, com (3,7)=1 e assim [3,7]=21. Como 3 e 7 são primos, pelo Pequeno Teorema de Fermat, tem-se que $a^7 \equiv a \bmod 7$ e $a^3 \equiv a \bmod 3$. Tomando a congruência $a^3 \equiv a \bmod 3$, elevando ao quadrado, segue que $a^6 \equiv a^2 \bmod 3$. Em seguida, multiplicando por a, vemos que $a^7 \equiv a^3 \bmod 3$, donde $a^7 \equiv a \bmod 3$. Agora, como $a^7 \equiv a \bmod 3$ e $a^7 \equiv a \bmod 7$, segue que $a^7 \equiv a \bmod [3,7]$, isto é, $a^7 \equiv a \bmod 21$.

Alternativa 1: Pode-se também mostrar que $a^7 \equiv a \bmod 3$ usando a outra forma do Pequeno Teorema de Fermat: Se $3 \mid a$ tem-se que $a \equiv 0 \bmod 3$, portanto $a^7 \equiv a \bmod 3$. No caso $3 \nmid a$, $(a,3) = 1$ e pelo Pequeno Teorema de Fermat $a^2 \equiv 1 \bmod 3$. Elevando ao cubo e em seguida multiplicando por a tem-se que $a^7 \equiv a \bmod 3$.

Alternativa 2: Pode-se usar também classes residuais: Seja a um inteiro qualquer. Segue que $a \equiv 0 \bmod 3$, $a \equiv 1 \bmod 3$ ou $a \equiv 2 \bmod 3$. Se $a \equiv 0 \bmod 3$ tem-se que $a^7 \equiv a \bmod 3$. Se $a \equiv 1 \bmod 3$ tem-se que $a^7 \equiv 1 \bmod 3$, donde $a^7 \equiv a \bmod 3$. No caso $a \equiv 2 \bmod 3$, elevando ao quadrado, segue que $a^7 \equiv 2^7 \bmod 3$, onde $2^7 \equiv 2 \bmod 3$, portanto $a^7 \equiv a \bmod 3$.

Pauta de correção

- Provar que $a^7 \equiv a \bmod 7$ $[0,25]$
- Provar que $a^7 \equiv a \bmod 3$ $[0,5]$
- Concluir que $a^7 \equiv a \bmod [3,7]$ $[0,25]$

Questão 8 [1,0 pt ::: (a)=0,5; (b)=0,5]

Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ duas funções. Prove que:

(a) se $g \circ f$ é injetiva, então f é injetiva.

(b) se $f \circ g$ é sobrejetiva, então f é sobrejetiva.

Solução

(a) O objetivo é mostrar que, dados $x_1, x_2 \in X$ satisfazendo $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$. Assuma $f(x_1) = f(x_2)$. Como $g : Y \to X$ é uma função, tem-se que $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, isto é, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Como $g \circ f : X \to X$ é injetiva por hipótese, conclui-se que $x_1 = x_2$, ou seja, $f : X \to Y$ é injetiva.

(b) O objetivo é mostrar que, dado qualquer $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Visto que $f \circ g : Y \to Y$ é sobrejetiva, dado qualquer $y \in Y$, existe $y_1 \in Y$ tal que $(f \circ g)(y_1) = y$, isto é $f(g(y_1)) = y$. Denotando por $x = g(y_1) \in X$, conclui-se que, dado $y \in Y$, existe $x = g(y_1) \in X$ tal que $f(x) = y$, isto é, f é sobrejetiva.

Pauta de correção

Item (a)

- Usar corretamente as definições de injetividade e composição de funções [0,25]
- Concluir corretamente a solução do item [0,25]

Item (b)

- Usar corretamente as definições de sobrejetividade e composição de funções [0,25]
- Concluir corretamente a solução do item [0,25]