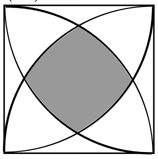
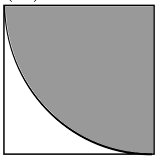
1. Assinale, dentre as regiões a seguir, pintadas de cinza, aquela que é formada pelos pontos do quadrado cuja distância a qualquer um dos vértices não é maior do que o comprimento do lado do quadrado.

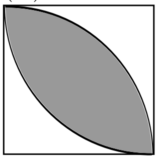
(A)



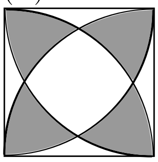
(B)



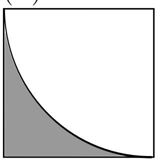
(C)



(D)



(E)



RESPOSTA: (A)

A região é a intersecção dos 4 quartos de círculos contidos no quadrado, com centros nos vértices do quadrado, e raios iguais ao lado do quadrado.

2. Um círculo de raio R tem área A e, girando o círculo em torno de um diâmetro, obtemos uma esfera de volume V. Se repetirmos o procedimento com um círculo de raio 2,5R, sua área e o volume da esfera correspondente serão, respectivamente,

(A) 2,5A e 2,5V
(B) 5A e 10V
(C) 5A e 25V
(D) 6,25A e 12,25V
(E) 6,25A e 15,625V

RESPOSTA: (E)

A área é $2,5^2 = 6{,}25$ vezes maior e o volume é $2{,}5^3 = 15{,}625$ vezes maior.

3. Um comerciante compra conjuntos de 4 canetas, a 5 reais cada conjunto, e vende essas canetas em pacotes de três, cobrando 5 reais por pacote. Quantos pacotes ele deve vender, no mínimo, para ter um lucro de 100 reais?

(A) 50
(B) 90
(C) 80
(D) 100

(E) 180

RESPOSTA: (C)

O preço de custo de um pacote é de $\frac{3}{4}$ de 5 reais, isto é, $\frac{15}{4}$ reais. Vendendo a 5 reais, o lucro é de $5 - \frac{15}{4} = \frac{5}{4}$ reais por pacote. Para lucrar 100 reais, é preciso então vender

$$\frac{100}{5/4} = 80$$

pacotes.

4. Na primeira fase de um campeonato interescolar de basquete, onde cada time joga uma vez contra cada um dos outros times, foram realizados 253 jogos. Quantos times havia no campeonato?

(A) 15 (B) 17
(C) 23 (D) 51
(E) 126

RESPOSTA: (C)

Seja n o número de times. Cada time realiza $n-1$ jogos. Então seriam $n(n-1)$ jogos ao todo, mas essa contagem conta cada jogo duas vezes. Assim, são $\frac{n(n-1)}{2}$ jogos. Queremos n tal que $\frac{n(n-1)}{2} = 253$, isto é, $n(n-1) = 506$. A solução é $n = 23$ (ou resolve-se a equação de segundo grau $n^2 - n - 506 = 0$ ou então chega-se a esse número por inspeção dos números inteiros cujos quadrados são próximos de 500).

5. A soma de 11 inteiros consecutivos é N. Qual é o maior desses números em termos de N?

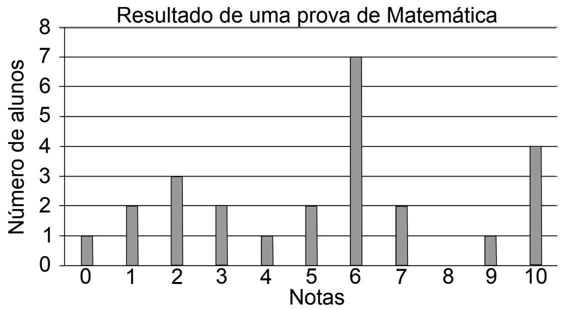
(A) $\frac{N}{5} + 5$ (B) $\frac{N}{11} + 5$
(C) $\frac{N}{5} + 10$ (D) $\frac{N}{11} + 10$
(E) $\frac{N}{6} + 10$

RESPOSTA: (B)

Se o maior dos números mencionados for n, então estamos somando todos os números inteiros de $n - 10$ a n. Isso dá

$$11 \cdot \frac{(n-10)+n}{2} = 11n - 55\,.$$

Como essa soma tem que dar N, então $11n - 55 = N$ e, por conseguinte, $n = \frac{N}{11} + 5$.



6. O gráfico de barras exibe a distribuição de frequência das notas obtidas em uma prova de Matemática.

A média aritmética das notas dessa prova é igual a

(A) 2,50 (B) 3,50

(C) 5,00 (D) 5,32

(E) 6,00

RESPOSTA: (D)

A média aritmética é a soma de todas as notas dividida pelo total de alunos. O total de alunos é a soma das alturas das barras:

$$1+2+3+2+1+2+7+2+0+1+4 = 25\,.$$

A soma das notas é a soma da altura das barras vezes a nota correspondente:

$$1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot 4+2\cdot 5+7\cdot 6+2\cdot 7+0\cdot 8+1\cdot 9+4\cdot 10 = 133\,.$$

Então a média é

$$\frac{133}{25} = \frac{532}{100} = 5{,}32\,.$$

7. A Estação de Tratamento de Esgotos de Sarapuí, no Rio de Janeiro, tem a capacidade de tratar 1500 litros de esgoto por segundo. Seja T o tempo necessário para que essa estação processe o volume de esgoto correspondente ao volume de uma piscina de 50 metros de comprimento, 25 metros de largura e 2 metros de profundidade. Dentre as opções abaixo, o valor de T está mais próximo de

(A) dois segundos (B) dois minutos

(C) meia hora (D) uma hora

(E) um dia

RESPOSTA: (C)

Uma piscina com as dimensões dadas tem $50 \times 25 \times 2 = 2500$ metros cúbicos; 1500 litros por segundo significa 1,5 metro cúbico por segundo. Então a Estação processa 2500 metros cúbicos em

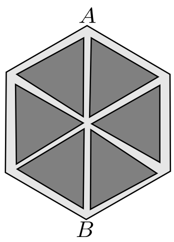
$$\frac{2500}{1{,}5} = \frac{5000}{3}$$

segundos. Isso dá

$$\frac{5000}{3 \times 60} = \frac{500}{18} = \frac{250}{9}$$

minutos, um valor entre 27 e 28 minutos. Então meia hora, entre as alternativas apresentadas, é a opção mais próxima.

8. Uma pequena praça tem a forma de um hexágono dividido em triângulos, como ilustrado na figura. A reta que liga A e B está alinhada com a direção norte-sul, sendo A mais ao norte. Os espaços do hexágono fora dos triângulos são ruas nas quais uma pessoa pode caminhar.



Quantos são os caminhos diferentes que uma pessoa pode seguir (sem sair da praça) para ir do ponto A ao ponto B se, durante sua caminhada, ela sempre está mais ao sul do que estava em qualquer instante anterior?

(A) 6 (B) 9
(C) 11 (D) 12
(E) 72

RESPOSTA: (C)

No primeiro trecho há 3 alternativas. A do meio e as laterais. O número de caminhos começando por uma das laterais é igual ao número de caminhos começando pela outra lateral, de modo que basta contar uma delas.

Começando pelo meio: desce-se ao centro, e do centro há 3 opções. Seguindo cada uma delas, a regra de caminhar para o sul faz com que não haja mais opções depois. Então são 3 caminhos quando se parte pelo meio.

Começando por uma lateral: depois do primeiro trecho há duas opções, seguir pelo contorno da praça ou rumar para o meio. Se seguir a opção do contorno da praça o caminho posterior fica determinado (1 caminho). Se seguir para o meio, há 3 opções, como no caso anterior (3 caminhos). Então são 4 caminhos no total.

Portanto são 4 caminhos começando pela esquerda, 4 pela direita e 3 pelo meio, perfazendo um total de 11.

9. Seja $N = 12^{2012} + 2012^{12}$. O maior valor de n tal que 2^n é divisor de N é

(A) 10 (B) 12

(C) 16 (D) 24

(E) 36

RESPOSTA: (D)

Como $12 = 2^2 \cdot 3$ e $2012 = 2^2 \cdot 503$, então

$$N = 2^{4024} \cdot 3^{2012} + 2^{24} \cdot 503^{12} = 2^{24} \left(2^{4000} \cdot 3^{2012} + 503^{12}\right) .$$

Então 2^{24} divide N. Para saber se existe uma potência de 2 maior que divide N precisamos saber se o número entre parênteses é par ou ímpar. Se for ímpar, então não é divisível por 2 e 24 é a potência máxima.

Ora, o termo da esquerda é claramente um múltiplo de 2, portanto é par. Já o termo da direita é uma potência de um número ímpar, que sempre é ímpar. A soma dos dois termos é, portanto, ímpar.

10. A *média geométrica* de três números positivos é a raiz cúbica do produto dos três. Se a média geométrica de três números naturais distintos é igual a 5, qual é a soma desses três números?

(A) 15 (B) 16

(C) 21 (D) 30

(E) 31

RESPOSTA: (E)

Sejam $a < b < c$ os 3 números naturais distintos. Como a média geométrica dos 3 é 5, então $abc = 5^3 = 125$. Isso implica que esses números só podem ser 1, 5, $5^2 = 25$ ou $5^3 = 125$. Se $c = 125$, os outros dois teriam que ser iguais a 1, e não seriam então distintos. Se nenhum deles for 25, então os três têm que ser 1 ou 5, ou seja, necessariamente dois deles seriam iguais, o que não é permitido. Então $c = 25$, $b = 5$ e $a = 1$, e a soma deles é 31.

11. A igualdade $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$ é verdadeira para

(A) $a = 1$ e $b = 1$ (B) $a = 2$ e $b = 1$

(C) $a = 1$ e $b = 2$ (D) $a = 2$ e $b = 0$

(E) $a = 0$ e $b = 2$

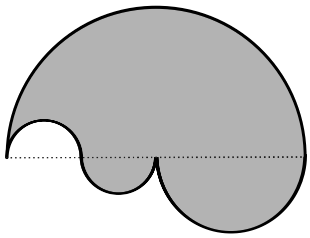
RESPOSTA: (E)

Se vale a igualdade, então vale a igualdade dos quadrados. O quadrado do lado esquerdo é igual a 8. O quadrado do lado direito é igual a $a^2+2b^2+2\sqrt{2}ab$. Como as opções de resposta são números inteiros, a igualdade $8 = a^2 + 2b^2 + 2\sqrt{2}ab$ só pode ser satisfeita se $ab = 0$, ou seja, se ou a ou b for zero. Isso descarta as três primeiras alternativas.

A alternativa (D) não serve, porque se $b = 0$ então a^2 tem que ser 8, logo a não pode ser igual a 2.

Resta a alternativa (E), que de fato se confirma. Se $a = 0$ e $b = 2$ então o lado direito é $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$. E o lado esquerdo também é $\sqrt{8}$, pois, como comentado acima, seu quadrado é igual a 8.

12. A figura ao lado é composta por 4 semicircunferências. As duas menores possuem o mesmo raio, medindo 1,5 cm. A semicircunferência intermediária tem diâmetro igual ao raio da circunferência maior.



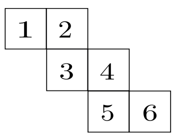
A área da região sombreada, em cm^2, é

(A) 18π
(B) $22{,}5\pi$
(C) $25{,}5\pi$
(D) 36π
(E) 45π

RESPOSTA: (B)

O excesso e a falta dos semicírculos menores se compensam, de modo que a área total é a soma da área do semicírculo maior (de raio 6) com a área do semicírculo de tamanho intermediário (de raio 3). Então a área é $\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 + \frac{1}{2}\pi \cdot 6^2 = \frac{45}{2}\pi$=22,5$\pi$.

13. A figura ao lado apresenta a planificação de um cubo. A face oposta à face 1



(A) é a face 3.
(B) é a face 4.
(C) é a face 5.
(D) é a face 6.
(E) não pode ser determinada.

RESPOSTA: (B)

Basta dobrar as faces mentalmente.

14. Se $f(x) = x^2 - x + 1$, a é um número real e h é outro número real diferente de zero, então a expressão

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

é igual a

(A) $2a + h - 1$.

(B) $\dfrac{2ah + h^2 - 2a + h + 2}{h}$.

(C) $2a + h + 1$.

(D) $\dfrac{2ah + h^2 - 2a + h}{h}$.

(E) $\dfrac{2ah + h^2 - 2a - h + 2}{h}$.

RESPOSTA: (A)

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\big[(a+h)^2 - (a+h) + 1\big] - \big[a^2 - a + 1\big]}{h} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a - h + 1 - a^2 + a - 1}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2 - h}{h} = 2a - 1 + h\,.\end{aligned}$$

15. O consumo de um carro é de 10 km/ℓ de gasolina. Seu proprietário pagou 3200 reais para uma oficina instalar um kit de gás natural veicular (GNV). O consumo do carro a gás é de 13 km/m^3. A gasolina custa 2,80 reais por litro e o gás custa 2,60 reais por m^3. O número de quilômetros que o carro deve rodar funcionando exclusivamente com GNV para que a economia em combustível recupere o investimento com a instalação do kit é

(A) 20000
(B) 24000
(C) 32000
(D) 40000
(E) 48000

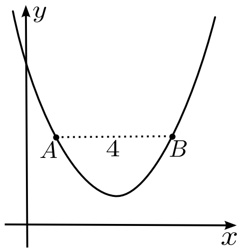
RESPOSTA: (D)

O consumo de gasolina é de 1 litro a cada 10 quilômetros, isto é, 0,1 litro para cada quilômetro. Logo, o custo do quilômetro rodado com gasolina é de 28 centavos.

O consumo de gás é de 13 km por metro cúbico, ou seja, $\frac{1}{13}$ metro cúbico por quilômetro. Como o preço do metro cúbico é 2,60 reais, o custo de um quilômetro rodado é de $\frac{2{,}60}{13} = 0{,}2$ reais, isto é, 20 centavos.

Então a economia é de 8 centavos por quilômetro. Para chegar em 3200 reais, ou 320.000 centavos, é preciso rodar 320.000/8 = 40.000 quilômetros.

16. Na figura vemos o gráfico de $f(x) = x^2 - 6x + 11$. Os pontos A e B estão nesse gráfico e o segmento horizontal AB tem comprimento 4. Qual é a distância de AB ao eixo das abscissas?



(A) $\frac{11}{6}$ (B) $\frac{7}{2}$
(C) 4 (D) 5
(E) 6

RESPOSTA: (E)

Metade do segmento AB tem comprimento 2. Então a distância de AB ao vértice da parábola é $2^2 = 4$, usando aí o fato de que o coeficiente de x^2 é igual a 1.

Para saber a altura do vértice, pode-se completar quadrados. Temos

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 + 2 = (x - 3)^2 + 2\,,$$

logo a altura do vértice é 2.

Levando-se em conta as duas informações, a altura do segmento AB é de $4 + 2 = 6$.

17. Com uma nova invenção, o custo da produção de um produto foi reduzido em 50%. Após uma isenção de impostos, o custo da produção desse mesmo produto foi reduzido em 40% e, em seguida, com a diminuição das tarifas de energia, o custo ainda foi reduzido em 10%. Qual foi a redução percentual do custo da produção desse produto?

(A) 27% (B) 50%
(C) 73% (D) 77%
(E) 100%

RESPOSTA: (C)

A primeira redução significa uma multiplicação por 0,5. A segunda, uma multiplicação por 0,6. E a terceira, uma multiplicação por 0,9. Isso dá uma multiplicação por 0,27, o que significa uma redução de 73%.

18. Numa corrida de táxi é cobrado um valor inicial fixo chamado bandeirada e mais uma quantia que é proporcional à quilometragem percorrida. Sabe-se que por uma corrida de 7 km são cobrados R$ 22,00, enquanto que uma corrida de 3 km custa R$ 11,80. O valor da bandeirada, em reais, é

(A) 3,75 (B) 3,95
(C) 4,05 (D) 4,15
(E) 4,25

RESPOSTA: (D)

Pela diferença entre os valores de 3 e 7 km, 4 km (depois da bandeirada) custam 22 - 11,8 = 10,2 reais. Então 3 quilômetros custam 3/4 disso, isto é, 7,65 reais. Como o preço de 3 km é de 11,8, então a bandeirada é de 11,8 - 7,65 = 4,15 reais.

19. Sejam A e B dois pontos distintos no plano. O conjunto dos pontos C desse plano tais que a área do triângulo ABC é igual a 1 é

(A) uma reta.
(B) um par de retas.
(C) uma parábola.
(D) vazio.
(E) impossível de se determinar sem se conhecer A e B.

RESPOSTA: (B)

A área do triângulo é o produto do tamanho de AB pela distância de C à reta que contém AB, dividido por 2. Ou seja, como queremos fixar a área igual a 1, a distância de C à reta que contém AB é sempre igual a $\frac{2}{AB}$. Mas o conjunto de pontos que distam de uma reta por um valor fixo é um par de retas.

20. Um silo para armazenagem de grãos é feito de metal e tem o formato de um cilindro medindo 2,5 m de diâmetro e 6 m de altura. É preciso pintar a superfície lateral externa (sem tampa ou fundo) de três desses silos e a tinta indicada tem um rendimento de 40 m^2 por galão. Sabendo que serão necessárias duas demãos de pintura em cada silo, qual é a melhor aproximação para a quantidade de tinta necessária?

(A) 6 galões (B) 7 galões
(C) 9 galões (D) 14 galões
(E) 16 galões

RESPOSTA: (B)

A área da parede do cilindro é o perímetro 2,5π multiplicado pela altura 6, isto é, 15π. Como são duas demãos em 3 silos, a área total de pintura será de 90π metros quadrados. Com rendimento de 40 metros quadrados por galão, serão necessários $90\pi/40$ galões. Aproximando π por 3 (com um erro cometido de menos de 5%) isso dá aproximadamente 27/4, que é um número próximo de 7. Serão necessários, portanto, em torno de 7 galões.

21. Um número é *capicua* quando suas leituras da esquerda para a direita e da direita para a esquerda são iguais. Por exemplo, 12321 e 8709078 são exemplos de números capicuas. Quantos números capicuas de cinco dígitos e três algarismos distintos existem?

(A) 648 (B) 720

(C) 729 (D) 810

(E) 900

RESPOSTA: (A)

Se o número tem 5 dígitos e é capicua, basta sabermos quem são os 3 primeiros. O primeiro não pode ser zero, então há 9 possibilidades para ele. Para o segundo, que é distinto do primeiro, há também 9 possibilidades, pois agora o zero é permitido. E, para o terceiro, restam 8 possibilidades, já que é distinto dos outros dois. Então são $9 \times 9 \times 8 = 648$ possibilidades.

22. Cada face de um cubo pode ser pintada de vermelho ou de azul. Quantos cubos diferentes podemos obter? (Repare que a posição em que o cubo se encontra não influi; por exemplo, temos um único cubo que tem uma única face azul e todas as outras faces vermelhas.)

(A) 5 (B) 6

(C) 8 (D) 10

(E) 12

RESPOSTA: (D)

Se A representa o número de faces azuis e V o número de faces vermelhas, então podemos analisar cada uma das possibilidades para o par (A, V), que são: $(0, 6)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$ e $(6, 0)$.

Nos casos $(0, 6)$ e $(6, 0)$ há apenas uma cor, então só há um jeito (em cada uma) de pintar o cubo, totalizando 2 maneiras. Nos casos $(1, 5)$ e $(5, 1)$ há uma face de uma cor e as demais da outra cor. Também só há uma maneira de fazer isso em cada um dos dois casos, totalizando 2 maneiras. Nos casos $(2, 4)$ e $(4, 2)$, em que duas faces têm uma cor e as demais têm outra cor, essas duas cores iguais podem ser em faces adjacentes ou opostas. Então são duas possibilidades em cada um dos dois casos, totalizando 4 maneiras. Finalmente, no caso $(3, 3)$, ou cada cor aparece em 3 faces em torno de um vértice, ou cada cor aparece em 3 faces em que duas são opostas. Isso dá 2 maneiras.

No total, são 10 maneiras de pintar o cubo.

23. Um grupo de n rapazes e $2n$ moças disputou um torneio de tênis. Todo competidor jogou exatamente uma vez com cada um dos outros competidores e, ao final, 10% das partidas ocorreram entre rapazes. O valor de n é

(A) 6 (B) 7
(C) 8 (D) 9
(E) 10

RESPOSTA: (B)

O número de partidas entre rapazes é $\frac{1}{2}n(n-1)$. O número total de partidas é $\frac{1}{2}3n(3n-1)$. A razão do primeiro pelo segundo deve ser 0,1 (10%), isto é:

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{\frac{1}{2}3n(3n-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{3n-1}\,.$$

Então

$$9n - 3 = 10n - 10\,,$$

o que implica $n = 7$.

24. A respeito da afirmação de que $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ são soluções da equação

$$\frac{(x-1)(x-2)}{2} - (x-1)(x-3) + \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 1 = 0\,,$$

pode-se assegurar que ela é

(A) verdadeira.
(B) falsa, pois trata-se de uma equação do segundo grau, logo não possui 3 soluções distintas.
(C) falsa, pois $x = 1$ não é solução dessa equação.
(D) falsa, pois $x = 2$ não é solução dessa equação.
(E) falsa, pois $x = 3$ não é solução dessa equação.

RESPOSTA: (A)

Verifica-se que ela é verdadeira por inspeção sobre os três números apresentados, que anulam a expressão da esquerda. (Obs.: de fato, trata-se de um polinômio nulo. Ou seja, qualquer número real é solução da equação.)

25. Se $X = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x| \leq -x\}$, então
(A) $X = \,]-\infty, 0]$.
(B) $X = \emptyset$.
(C) $X = \{0\}$.
(D) $X = \,[0, +\infty[$.
(E) $X = \mathbb{R}$.

RESPOSTA: (A)

Se $x = 0$ então $|x| = -x$ e, portanto, $|x| \leq -x$. Se $x < 0$ então $|x| = -x$ e, portanto, $|x| \leq -x$. Se $x > 0$ então $|x|$ é positivo e $-x$ é negativo, implicando que $|x| > -x$, ou seja, neste caso não vale $|x| \leq -x$.

Portanto $x \in X$ se, e somente se, $x \leq 0$.

26. Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Uma função f de A em B é *injetiva* se, ao tomar-se i e j em A, com i diferente de j, então $f(i)$ necessariamente é diferente de $f(j)$. O número total de funções $f : A \to B$ injetivas é
(A) 21
(B) 35
(C) 120
(D) 2520
(E) 7^5

RESPOSTA: (D)

Há 7 possibilidades para $f(1)$, para cada uma delas 6 possibilidades para $f(2)$, etc, até 3 possibilidades para $f(5)$. Então são

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \left(= \frac{7!}{(7-5)!} \right) = 2520$$

possibilidades.

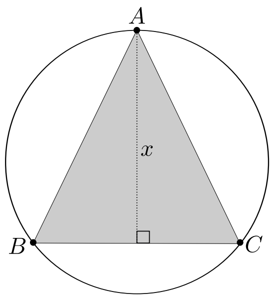
27. O valor de $N = (1001^2 - 999^2)^2$ é
(A) 10^6
(B) 4×10^6
(C) 12×10^6
(D) 16×10^6
(E) 16.900.000

RESPOSTA: (D)

Temos:

$$N = [(1001 - 999)(1001 + 999)]^2 = 4000^2 = 16 \times 10^6\,.$$

28. Considere um triângulo isósceles inscrito em um círculo de raio 3 metros, como mostra a figura. Se x representa a medida, em metros, da altura desse triângulo com relação à sua base, então sua área, em metros quadrados, é igual a



(A) $x\sqrt{x(6-x)}$
(B) $\frac{x}{2}\sqrt{x(6-x)}$
(C) $x\sqrt{x(3-x)}$
(D) $\frac{x}{2}\sqrt{x(3-x)}$
(E) $\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: (A)

Se y é a metade da base do triângulo, então a área do triângulo é xy. Portanto basta calcular y em função de x e fazer o produto dos dois.

Seja C o centro do círculo. A distância de C ao pé da altura é $x-3$. A distância de C a qualquer um dos vértices da base é 3. Então, pelo Teorema de Pitágoras, $y^2+(3-x)^2=3^2$. Daí segue que $y=\sqrt{x(6-x)}$.

29. As casas do quadrado da figura foram preenchidas com nove números inteiros positivos, de modo a fazer com que os produtos dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal fossem todos iguais.

	6	9
		12

Em seguida, seis números inteiros foram apagados, restando os números 6, 9 e 12, nas posições mostradas. Se x era o número escrito na casa que está na primeira linha e na primeira coluna, e y era o número escrito na casa que está na primeira linha e na terceira coluna, então a soma $x+y$ é igual a
(A) 5
(B) 9
(C) 18
(D) 20
(E) 36

RESPOSTA: (A)

O produto dos números da diagonal principal é $x\cdot 6\cdot 12=72x$. O produto da terceira coluna é $12\cdot 9\cdot y=108y$. Como os produtos são iguais, $72x=108y$, ou $y=\frac{2}{3}x$. O número que falta na segunda linha deve ser tal que seu produto com $6 \cdot 9 = 54$ seja igual a $72x$. Então esse número é $\frac{72x}{54} = \frac{4}{3}x$. O primeiro número da terceira linha é tal que seu produto com $6y$ (diagonal secundária) é igual a $72x$. Então ele vale

$$\frac{72x}{6y} = \frac{72x}{6 \cdot \frac{2}{3} \cdot x} = \frac{72}{4} = 18\,.$$

Na primeira coluna ficaram, portanto, os números x, $\frac{4}{3}x$ e 18, cujo produto é $24x^2$. Mas esse produto deve ser igual a $72x$, então ou $x = 0$ ou $x = 3$. Por hipótese, $x > 0$, então vale a segunda opção e, assim, $y = 2$.

Portanto $x + y = 5$.

30. Eduardo distribuiu as figurinhas de sua coleção em 7 montes iguais e deu um monte a Ricardo. Juntou as figurinhas restantes, distribuiu-as em 5 montes iguais e novamente deu um monte a Ricardo. Mais uma vez, distribuiu as figurinhas que sobraram, agora em 3 montes iguais, e deu um dos montes para Ricardo. Se Eduardo ficou com 96 figurinhas, quantas figurinhas ele tinha inicialmente?

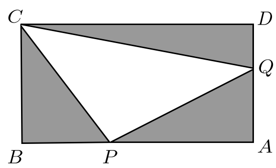
(A) 105 (B) 210
(C) 288 (D) 480
(E) 672

RESPOSTA: (B)

Seja N a quantidade inicial. Após a primeira rodada, Eduardo ficou com $\frac{6}{7} \cdot N$ cartas. Depois ficou com $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot N$ cartas. Depois ficou com $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot N$ cartas, que são as 96 restantes. Então

$$N = 96 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} = 210\,.$$

31. No retângulo $ABCD$ da figura os triângulos cinzentos têm todos a mesma área. Quanto vale $\frac{AP}{BP}$?



(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
(C) $\sqrt{3}$ (D) $\frac{9}{5}$
(E) 2

RESPOSTA: (B)

Se os triângulos retângulos têm a mesma área então os produtos dos catetos são iguais:

$$BC \cdot BP = AP \cdot AQ = CD \cdot DQ\,.$$

Numeremos os três produtos que aparecem nessa equação como I, II e III, na ordem em que aparecem na equação acima. Da igualdade de I com II, sai

$$\frac{AP}{BP} = \frac{BC}{AQ} = \frac{BC}{BC - DQ} = \frac{1}{1 - \frac{DQ}{BC}}\,.$$

De I com III sai

$$\frac{DQ}{BC} = \frac{BP}{CD} = \frac{BP}{AB} = \frac{BP}{AP + BP} = \frac{1}{1 + \frac{AP}{BP}}\,.$$

Juntando as duas e dando o nome de x para o quociente procurado $\frac{AP}{BP}$, temos

$$x = \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}}\,.$$

Então

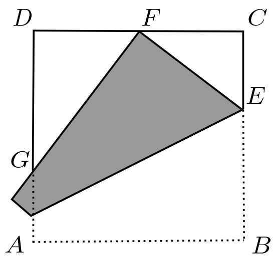
$$x(1+x) - x = 1 + x\,,$$

isto é,

$$x^2 - x - 1 = 0\,,$$

cuja solução positiva é $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

32. A figura mostra uma folha de papel quadrada $ABCD$ de lado 1, dobrada de modo que o ponto B coincida com o ponto médio F do lado CD. A medida de FG é



(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{6}$

(E) $\frac{7}{8}$

RESPOSTA: (D)

Seja $x = EF$. Como $EF = EB$, então FCE é um triângulo retângulo de catetos $\frac{1}{2}$ e $1 - x$, e hipotenusa x. Pelo Teorema de Pitágoras,

$$\frac{1}{4} + (1-x)^2 = x^2\,,$$

de onde resulta

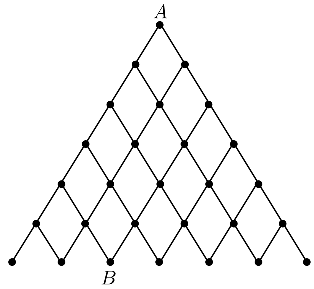
$$x = \frac{5}{8}\,.$$

Como o ângulo GFE é reto, então os ângulos DFG e EFC são complementares, de onde segue que os triângulos retângulos FDG e ECF são semelhantes. Então

$$\frac{FG}{FD} = \frac{EF}{EC}\,.$$

Como $FD = \frac{1}{2}$, $EF = x = \frac{5}{8}$ e $EC = 1 - x = \frac{3}{8}$, então $FG = \frac{5}{6}$.

33. A figura mostra uma rede de canos de água que tem início no ponto A. Quando se coloca água nesse ponto, ela flui para baixo de tal modo que, em cada ponto assinalado, a água que chega pelo cano superior se distribui igualmente pelos dois canos inferiores.



Se um litro de água é colocado em A, qual o volume de água, em litros, que chegará a B?

(A) $\frac{3}{64}$
(B) $\frac{1}{7}$
(C) $\frac{15}{64}$
(D) $\frac{3}{7}$
(E) $\frac{15}{32}$

RESPOSTA: (C)

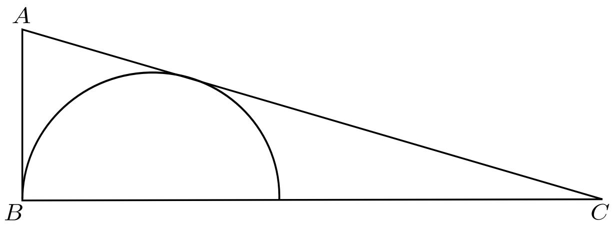
Como a água se divide igualmente nas bifurcações, e até chegar à parte inferior a água passa por 6 bifurcações, cada caminho de A até a parte inferior é percorrido por apenas $\frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ da água.

A quantidade de caminhos para chegar de A até B é 15. Pode-se chegar a esse número de várias maneiras, por exemplo contando as possibilidades diretamente. Outra maneira é perceber que o número de caminhos para chegar de A até um ponto da rede é o número correspondente no triângulo de Pascal que começa com 1 na posição de A, 1 e 1 na linha de baixo, e segue com a regra usual. Obtêm-se assim as linhas: 1; 1-1; 1-2-1; 1-3-3-1; 1-4-6-4-1; 1-5-10-10-5-1; 1-6-**15**-20-15-6-1.

34. O semicírculo da figura está inscrito no triângulo retângulo ABC de catetos $AB = 7$ e $BC = 24$.

O raio do semicírculo é igual a

(A) $2\sqrt{5}$
(B) 5
(C) $3\sqrt{3}$
(D) $\frac{21}{4}$
(E) $\frac{16}{3}$



RESPOSTA: (D)

Seja D o ponto de tangência da semicircunferência com o segmento AC. Seja O o centro da semicircunferência e $R = OD$ seu raio.

Como AB e AD são tangentes à mesma circunferência então têm mesmo tamanho. Assim $AC = 7 + DC$.

Pelo Teorema de Pitágoras, $AC = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$. Então $DC = 18$.

Os triângulos retângulos CDO e CBA são semelhantes, pois compartilham um dos ângulos agudos. Disto sai

$$\frac{R}{18} = \frac{OD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{24}\,,$$

isto é, $R = \frac{21}{7}$.

35. Em um triângulo retângulo conhecem-se a soma s dos catetos e altura h relativa à hipotenusa. Qual das expressões abaixo representa o valor da hipotenusa em função de s e h?

(A) $s - h$
(B) $\sqrt{h^2 + s^2}$
(C) $s + \sqrt{s^2 - h^2}$
(D) $\sqrt{h^2 + 4s^2} - h$
(E) $\sqrt{h^2 + s^2} - h$

RESPOSTA: (E)

Sejam a, b os catetos e c a hipotenusa do triângulo retângulo. Então $s = a+b$. Pelo Teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab = s^2 - 2ab$.

O dobro da área do triângulo é ab, mas também é hc, ou seja, $ab = hc$. Então

$$c^2 = s^2 - 2hc$$

ou, ainda,

$$c^2 + 2hc - s^2 = 0\,.$$

Essa é uma equação de segundo grau em c com solução positiva $\sqrt{h^2 + s^2} - h$.