Avaliação 1 - MA11 - 2015.1

Questão 1 **[2,0 pts]**

Faça um esboço do conjunto dos pontos do plano tais que

$$\lfloor x \rfloor^2 + \lfloor y \rfloor^2 = 4; \;\; x, y \in \mathbb{R},$$

onde $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leqslant x\}$ representa o maior inteiro menor do que x ou igual a x.

Questão 2 **[2,0 pts]**

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Prove que, se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

Questão 3 **[2,0 pts]**

Os termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de uma progressão aritmética positiva e crescente são os valores $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ de uma função afim.

(a) Mostre que cada a_i é igual à área de um trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais de equações
$$x = i - \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad x = i + \frac{1}{2}.$$

(b) Mostre que a soma $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ é igual à área do trapézio delimitado pelo gráfico de f, pelo eixo OX e pelas retas verticais $x = \dfrac{1}{2}$ e $x = n + \dfrac{1}{2}$.

(c) Conclua que $S = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Questão 4 **[2,0 pts]**

Dados dois conjuntos A e B, definimos o produto cartesiano de A por B, que denotamos por $A \times B$, como sendo o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, isto é, $A \times B = \{(a, b) | a \in A, \; b \in B\}$.

(a) Determine, justificando, se o conjunto $X = \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$ é um produto cartesiano de dois conjuntos.

(b) Suponha que A e B tenham exatamente 2 e 3 elementos, respectivamente. Quantos subconjuntos não vazios de $A \times B$ são também produtos cartesianos?

Questão 5 **[2,0 pts]**

Sejam E e F conjuntos com pelo menos 2 elementos e $f : E \to F$ uma função.

(a) Prove que, se f é bijetiva então $f(E \backslash A) = F \backslash f(A), \; \forall A \subset E$.

(b) Reciprocamente, prove que se $f(E \backslash A) = F \backslash f(A), \; \forall A \subset E, \; A \neq \emptyset$ e $A \neq E$, então $f : E \to F$ é bijetiva.