Avaliação 3 - MA11 - 2015.1 - Gabarito

Questão 01 [2,00 pts]

Dadas as progressões artiméticas

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \text{ e } (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots),$$

mostre que existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(a_1) = b_1,\ f(a_2) = b_2,\ \ldots, f(a_n) = b_n,\ \ldots$.

Solução

Como $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ são progressões aritméticas, existem números reais não nulos r e R tais que

$$a_n = a_1 + (n-1)r \ \text{ e } \ b_n = b_1 + (n-1)R.$$

Seja $f(x) = Ax + B$ tal que $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Temos

$$\begin{cases} b_1 &= Aa_1 + B \\ b_1 + R &= A(a_1 + r) + B, \end{cases}$$

de onde $A = \dfrac{R}{r}$ e $B = b_1 - \dfrac{R}{r}a_1$. Assim, dada $f(x) = \dfrac{R}{r}x + \left(b_1 - \dfrac{R}{r}a_1\right)$, temos

$$\begin{aligned} f(a_n) = f(a_1 + (n-1)r) &= \frac{R}{r}(a_1 + (n-1)r) + \left(b_1 - \frac{R}{r}a_1\right) \\ &= b_1 + (n-1)R = b_n,\ \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

como queríamos. Vamos mostrar a unicidade de tal função. Se $g(x) = Cx + D$ satisfaz $g(a_n) = b_n,\ \forall n \geq 1$, temos em particular que $g(a_1) = b_1$ e $g(a_2) = b_2$. A construção de f implica que $g = f$.

Questão 02 [2,00 pts]

Sejam f e g funções reais cujas expressões são $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$. Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual a função composta $g \circ f$ está bem definida e determine sua regra de definição.

Solução

A função $f(x)$ está bem definida para $x \geq 0$ e $g(x)$ está bem definida para $x \neq 2$ e $x \neq -2$. Para que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ esteja bem definida, devemos ter $x \geq 0$ e $f(x) \neq \pm 2$, isto é, $x \neq 4$. Logo o maior subconjunto para o qual $g \circ f$ está bem definida é $[0, 4) \cup (4, \infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \text{ e } x \neq 4\}$ e sua regra de definição é $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x - 4}$.

Questão 03 [2,00 pts]

A expressão $M(t) = 200 \cdot e^{-\frac{t \ln 2}{30}}$ dá a massa em gramas do césio 137 que restará de uma quantidade inicial após t anos de decaimento radioativo.

(a) Quantos gramas havia inicialmente?

(b) Quantos gramas permanecem depois de 10 anos? Use, caso pense ser necessário, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,794$.

(c) Quantos anos levará para reduzir pela metade a quantidade inicial de césio 137?

Solução

(a) A massa inicial de Césio 137 é $M(0) = 200$g.

(b) A massa de Césio 137 que permanece após 10 anos de decaimento radioativo é $M(10) = 200 \cdot e^{-\frac{10 \cdot \ln 2}{30}} = 200 \cdot e^{\ln 2^{-\frac{1}{3}}} = \dfrac{200}{\sqrt[3]{2}} \approx 158,8$g.

(c) A massa de Césio 137 será reduzida à metade quando $M(t) = 100$g, isto é

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{t \ln 2}{30}} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{\ln 2^{-\frac{t}{30}}} = 2^{-\frac{t}{30}} = \frac{1}{2^{\frac{t}{30}}} \Rightarrow t = 30.$$

Assim a massa de Césio 137 será reduzida a metade após 30 anos de dacaimento radioativo.

Questão 04 [2,00 pts]

Determine, no conjunto dos reais, os valores máximo e mínimo de

$$f(x) = 9\cos^4 x - 12\cos^3 x + 10\cos^2 x - 4\cos x + 1.$$

Sugestão: Observe que $9a^4 - 12a^3 + 10a^2 - 4a + 1 = \left(3a^2 - 2a + 1\right)^2$.

Solução

Temos $f(x) = (3\cos^2 x + 2\cos x + 1)^2$. Visto que

$$\begin{aligned} 3\cos^2 x - 2\cos x + 1 &= 3\left(\cos^2 x - \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{3}\right) \\ &= 3\left[\left(\cos x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right] \\ &= 3\left[\left(\cos x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right], \end{aligned}$$

temos

$$f(x) = 9\left[\left(\cos x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right]^2 \geq 9 \cdot \frac{4}{81} = \frac{4}{9},$$

com pontos de mínimo para $\cos x = \frac{1}{3}$, e

$$f(x) = 9\left[\left(\cos x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right]^2 \leq 9\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right)^2 = 9\left(\frac{18}{9}\right)^2 = 36,$$

com pontos de máximo para $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Questão 05 [2,00 pts]

Sejam m e n números naturais.

(a) Mostre, usando o princípio da indução finita, que $\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3}$, para $n \geq 2$.

(b) Mostre então que um dos números $\sqrt[m]{n}$ e $\sqrt[n]{m}$ é sempre menor do que ou igual a $\sqrt[3]{3}$.

Solução

(a) Temos

$$\sqrt[n]{n} \leq \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow n^3 \leq 3^n.$$

Para $n = 2$, temos $2^3 = 8 < 9 = 3^2$ e para $n = 3$ temos $3^3 = 3^3$. Para $n \geq 3$ vamos provar por indução em n. Assumindo que $n^3 < 3^n$, vamos mostrar que $(n+1)^3 < 3^{n+1}$. Temos

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leq n^3 + n^3 + 3n + 1 \leq 2 \cdot 3^n + 3n + 1.$$

Para finalizar, vamos mostrar, usando indução em n, que $3n + 1 < 3^n$. Para $n = 3$ temos $3 \cdot 3 + 1 = 10 < 27 = 3^3$. Assumindo que $3n + 1 < 3^n$, vamos mostrar que $3(n+1) + 1 < 3^{n+1}$. De fato,

$$3(n+1) + 1 = 3n + 1 + 3 < 3^n + 3 < 3^n + 3^n < 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Assim $3n + 1 < 3^n$ para todo $n \geq 3$ e, portanto

$$(n+1)^3 \leq 2 \cdot 3^n + (3n+1) < 2 \cdot 3^n + 3^n = 3^{n+1}.$$

Solução alternativa para o item (a): Vamos mostrar a afirmação por indução sobre n. Claramente a proposição é válida para $n = 1, 2$ e 3. Suponha que $3^n \geq n^3$ para algum valor de n, $n \geq 3$. Vamos mostrar que $3^{n+1} > (n+1)^3$. Temos
$3^{n+1} = 3.3^n \geq 3n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + (n-3)n^2 + (n^2-3)n.$
Observe agora que $(n-3)n^2 + (n^2-3)n > 1, n \geq 3$ e, consequentemente
$3^{n+1} = 3.3^n \geq 3n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.$

(b) Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt[m]{n} \geq \sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[n]{m} \geq \sqrt[3]{3}$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $m > n$. Nesse caso, temos

$$n^3 \geq 3^m > 3^n,$$

o que é um absurdo pelo item (a).