

Questão 01 [ 2,0 pts ]

---

Os números harmônicos  $H_j$  são definidos por

$$H_j = \sum_{k=1}^j \frac{1}{k}, \text{ para } j \geq 1.$$

Mostre, por indução em  $n$ , que  $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ , para todo  $n \geq 0$ .

**Solução**

Seja  $P(n)$  a proposição:  $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ , para todo  $n \geq 0$ .

Para  $n = 0$  temos que  $H_{2^0} = H_1 = 1 = 1 + \frac{0}{2}$ .

Suponha agora que  $P(n)$  é verdadeira para  $n = k$ , ou seja,  $H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$ .

Resta provar que  $P(k)$  implica  $P(k+1)$ .

De fato,

$$H_{2^{k+1}} = \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{2^k} \frac{1}{j} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{k}{2} + \sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{j} \geq 1 + \frac{k}{2} + (2^{k+1} - 2^k) \frac{1}{2^{k+1}} = 1 + \frac{k}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2}.$$

e assim  $P(k+1)$  é verdadeira.

Questão 02 [ 2,0 pts ]

---

- (a) Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente. Determine a razão dessa progressão.
- (b) Os lados de um triângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão?

**Solução**

- (a) Sejam  $a, aq$  e  $aq^2$ , com  $q > 1$  os comprimentos dos lados do triângulo retângulo.

Então segue que  $a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2$ , ou seja,  $1 + q^2 = q^4$ .

Fazendo  $t = q^2$  obtemos a equação  $t^2 - t - 1 = 0$ , cuja única solução

positiva é  $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  e, portanto,  $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ .

(b) Podemos supor que os comprimentos dos lados são  $a, aq$  e  $aq^2$ , com  $q > 0$ .

Pelas condições de existência de um triângulo devemos ter

$$a < aq + aq^2, aq < a + aq^2 \text{ e } aq^2 < a + aq.$$

Dividindo todas as inequações por  $a$  e levando-se em conta que  $q > 0$ , temos que:

$$- 1 < q + q^2 \text{ vale desde que } q > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2};$$

-  $q < 1 + q^2$  vale sempre; e

$$- q^2 < 1 + q \text{ vale desde que } q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, os comprimentos dos lados de um triângulo são termos de uma progressão geométrica de razão  $q$  se, e somente se,

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < q < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

### Questão 03 [ 2,0 pts ]

---

Considere  $a_n$  a quantidade de sequências de  $n$  termos, todos pertencentes a

$\{0, 1\}$ , que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

(a) Determine  $a_1$  e  $a_2$ .

(b) Encontre uma relação de recorrência de segunda ordem para a sequência  $a_n$ .

(c) Resolva a equação do item (b), usando o item(a), para obter uma expressão de  $a_n$  que dependa apenas de  $n$ .

### Solução

(a)  $a_1 = 2$ , pois as sequências 0 e 1 têm um termo e não possuem dois termos consecutivos iguais a 0. Além disso,  $a_2 = 3$ , pois as sequências 01, 10 e 11 têm dois termos e não possuem dois termos consecutivos iguais a 0.

(b) Para  $n \geq 3$  temos que  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , pois as sequências com  $n$  termos podem ser obtidas a partir daquelas que têm  $n - 1$  termos acrescentando o termo 1 e daquelas que têm  $n - 2$  termos acrescentando 10.

(c) Devemos resolver a equação de recorrência  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$  com  $a_1 = 2$  e  $a_2 = 3$ .

A equação característica é  $r^2 = r + 1$  e as suas raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Então, } a_n = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para determinar as constantes  $C_1$  e  $C_2$ , podemos usar  $a_1 = 2$  e  $a_2 = 3$  e assim obtemos o sistema

$$\begin{cases} C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 2 \\ C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos  $C_1 = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}$  e  $C_2 = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}$ .

Assim, segue que

$$a_n = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

**Questão 04** [ 2,0 pts ]

---

Determine as taxas efetivas anuais equivalentes a:

- (a) 24% ao ano, com capitalização semestral.
- (b) 40% ao ano, com capitalização trimestral.
- (c)  $i$  ao ano, capitalizado  $k$  vezes ao ano.

**Solução**

Pela **fórmula das taxas equivalentes**, temos que se a taxa de juros relativa a um determinado período de tempo é igual a  $i$ , então a taxa de juros relativa a  $n$  períodos de tempo é  $I$ , onde  $1 + I = (1 + i)^n$ .

- (a) A taxa é de  $24\%/2=12\%$  ao semestre. Logo  $1 + I = (1 + i)^2$  e como  $i = 0,12$ , temos que  $I = 1,12^2 - 1 = 1,2544 - 1 = 25,44\%$ .
- (b) Nesse caso a taxa é de  $40\%/4=10\%$  ao trimestre. Logo  $1 + I = (1 + i)^4$  e como  $i = 0,1$ , temos que  $I = 1,1^4 - 1 = 1,4641 - 1 = 46,41\%$ .
- (c) A taxa relativa ao período de capitalização é  $i/k$ .  
Logo  $1 + I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k$  e assim  $I = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1$ .

**Questão 05** [ 2,0 pts ]

---

Mostre que  $(a_n)$  é uma progressão aritmética se, e somente se, existirem números reais  $A$  e  $B$  tais que  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = An^2 + Bn$ , para todo  $n$  inteiro positivo.

**Solução**

Suponha que  $(a_n)$  seja uma progressão aritmética de razão  $r$  e primeiro termo  $a_1$ . Mostraremos então que existem números reais  $A$  e  $B$  tais que  $S_n = An^2 + Bn$ .

Sabemos que  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ , com  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ . Logo

$$S_n = \frac{[a_1 + a_1 + (n - 1)r]n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n.$$

Tomando  $A = \frac{r}{2}$  e  $B = a_1 - \frac{r}{2}$ , temos que  $S_n = An^2 + Bn$ , como queríamos.

Reciprocamente, suponha que  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = An^2 + Bn$ . Note que  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , para  $n > 1$ , e  $a_1 = S_1$ . Assim,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = An^2 + Bn - [A(n - 1)^2 + B(n - 1)] = (2A)n - A + B = (A + B) + 2A(n - 1).$$

Tomando  $a_1 = A + B$  e  $r = 2A$ , temos que  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de razão  $2A$  e primeiro termo  $A + B$ .