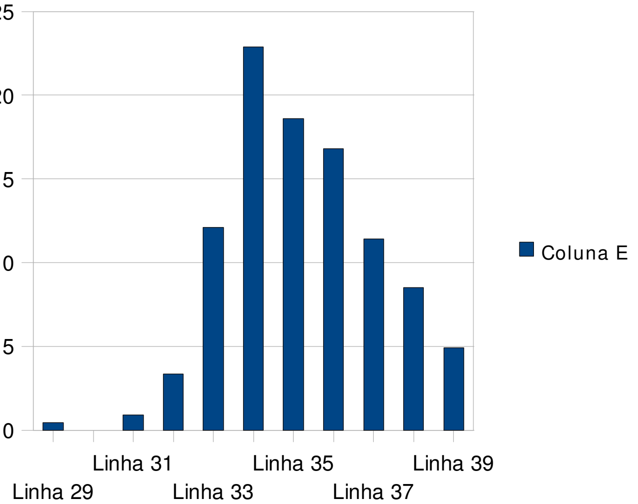
RELATORIO MA11

Questão 1		Questão 2		Questão 3		Questão 4			Questão 5		
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,5	0,5	1,0	1,0	1,0	NOTA
9,43	**9,40**	**7,77**	**9,28**	**5,20**	**3,63**	**6,08**	**3,02**	**2,05**	**4,59**	**2,45**	**5,83**
9,42		**8,52**		**4,41**		**3,30**			**3,52**		

			%
0	2	2	0,45
1	2	0	0
2	6	4	0,9
3	21	15	3,36
4	75	54	12,11
5	177	102	22,87
6	260	83	18,61
7	335	75	16,82
8	386	51	11,43
9	424	38	8,52
10	446	22	4,93
	17 POLOS		



Questão 1.

Um pequeno barco a vela, com 7 tripulantes, deve atravessar o oceano em 42 dias. Seu suprimento de água potável permite a cada pessoa dispor de 3,5 litros de água por dia (e é o que os tripulantes fazem). Após 12 dias de viagem, o barco encontra 3 náufragos numa jangada e os acolhe. Pergunta-se:

(1.0) (a) Quantos litros de água por dia caberão agora a cada pessoa se a viagem prosseguir como antes?

(1.0) (b) Se os 10 ocupantes de agora continuarem consumindo 3,5 litros de água cada um, em quantos dias, no máximo, será necessário encontrar uma ilha onde haja água?

Questão 2.

(1.0) (a) Quais são os valores de y para os quais existe uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 3$, $f(2) = 5$ e $f(3) = y$?

(1.0) (b) Tome $y = 9$ e determine a função quadrática correspondente. Justifique seus argumentos.

Questão 3.

(1.0) (a) Seja $f : A \to B$ uma função. Dê as definições de $f(X)$ e $f^{-1}(Y)$, para $X \subset A$ e $Y \subset B$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$, determine os conjuntos $f(\mathbb{R})$ e $f^{-1}(3)$.

(1.0) (b) Seja $f : A \to B$ uma função. Prove que $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$, quaisquer que sejam $X, Y \subset A$. Dê um exemplo em que $f(X \cap Y) \neq f(X) \cap f(Y)$.

Questão 4.

(0.5) (a) Se $r \neq 0$ é um número racional, prove que $r\sqrt{2}$ é irracional.

(0.5) (b) Dado qualquer número real $\epsilon > 0$, prove que existe um número irracional α tal que $0 < \alpha < \epsilon$.

(1.0) (c) Mostre que todo intervalo $[a, b]$, com $a < b$, contém algum número irracional.

Questão 5.

Sejam m e n números naturais primos entre si.

(1.0) (a) Mostre que $\frac{m}{n}$ é equivalente a uma fração decimal (isto é, com denominador potência de 10) se, e somente se, n não tem fatores primos diferentes de 2 ou 5.

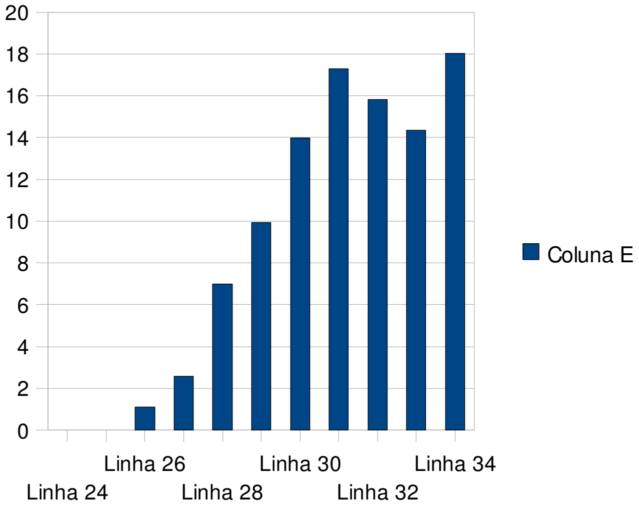
(1.0) (b) Mostre que se n tem outros fatores primos além de 2 ou 5 então a expansão decimal é infinita e, a partir de um certo ponto, periódica.

RELATORIO MA12

Questão 1			Questão 2		Questão 3			Questão 4		Questão 5			NOTA
0,5	0,5	1	1	1	0,4	0,8	0,8	1	1	0,5	1	0,5	
9,78	9,71	6,80	9,61	8,15	8,80	5,59	6,88	9,61	6,90	7,29	4,38	5,17	7,49
8,27			8,88		6,75			8,26		5,31			

			%
0	0	0	0
1	0	0	0
2	3	3	1,1
3	10	7	2,57
4	29	19	6,99
5	56	27	9,93
6	94	38	13,97
7	141	47	17,28
8	184	43	15,81
9	223	39	14,34
10	272	49	18,01

11 POLOS



Questão 1.

Considere a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ definida como indicado abaixo:

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 1 \\ a_2 & = & 2+3 \\ a_3 & = & 4+5+6 \\ a_4 & = & 7+8+9+10 \\ \ldots & & \end{array}$$

(0.5) (a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e o qual é o maior desses inteiros?

(0.5) (b) Calcule a_{10}.

(1.0) (c) Forneça uma expressão geral para o termo a_n.

Questão 2.

Um comerciante, para quem o dinheiro vale 5% ao mês, oferece determinado produto por 3 prestações mensais iguais a R\$ 100,00, a primeira paga no ato da compra.

(1.0) (a) Que valor o comerciante deve cobrar por esse produto, no caso de pagamento à vista?

(1.0) (b) Se um consumidor desejar pagar o produto em três prestações mensais iguais, mas sendo a primeira paga um mês após a compra, qual deve ser o valor das parcelas?

Utilize, se desejar, os seguintes valores para as potências de $1,05$: $1,05^2 = 1,1025$; $1,05^{-1} = 0,9524$; $1,05^{-2} = 0,9070$.

Questão 3.

Considere o conjunto dos números escritos apenas com os algarismos 1, 2 e 3, em que o algarismo 1 aparece uma quantidade **par** de vezes (por exemplo, 2322 e 12123). Seja a_n a quantidade desses números contendo exatamente n algarismos.

(0.4) (a) Liste todos esses números para $n = 1$ e $n = 2$, indicando os valores de a_1 e a_2.

(0.8) (b) Explique por que a_n satisfaz a equação de recorrência $a_{n+1} = (3^n - a_n) + 2a_n$, para $n \geq 1$ (note que 3^n é o número total de números com n algarismos iguais a 1, 2 ou 3).

(0.8) (c) Resolva a equação de recorrência em (b).

Questão 4.

(1.0) (a) Mostre, *por indução finita*, que

$$1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + n \cdot 3^{n-1} = \frac{(2n-1)3^n + 1}{4}.$$

(1.0) (b) Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ progressão geométrica com termo inicial a_1 positivo e razão $r > 1$, e S_n a soma dos n primeiros termos da progressão. Prove, *por indução finita*, que $S_n \leq \frac{r}{r-1} a_n$, para qualquer $n \geq 1$.

Questão 5.

Seja $(x_n)_{n \geq 0}$ sequência definida pela relação de recorrência $x_{n+1} = 2x_n + 1$, com termo inicial $x_0 \in \mathbb{R}$.

(0.5) (a) Encontre x_0 tal que a sequência seja constante e igual a um número real a.

(1.0) (b) Resolva a recorrência com a substituição $x_n = y_n + a$, em que a é valor encontrado em (a).

(0.5) (c) Para que valores de x_0 a sequência é crescente? Justifique.