PROFMAT – Exame de Qualificação 2012-1

Gabarito

1.

(10pts) Um corpo está contido num ambiente de temperatura constante. Decorrido o tempo t (em minutos), seja $D(t)$ a diferença entre a temperatura do corpo e do ambiente. Segundo a Lei do Resfriamento de Newton, $D(t)$ é uma função decrescente de t, com a propriedade de que um decréscimo relativo

$$\frac{D(t) - D(t+h)}{D(t)}$$

no intervalo de tempo $[t, t+h]$ depende apenas da duração h desse intervalo (mas não do momento em que essa observação se iniciou). Isto posto, responda à seguinte pergunta:

Num certo dia, a temperatura ambiente era de 30°. A água, que fervia a 100° numa panela, cinco minutos depois de apagado o fogo ficou com a temperatura de 60°. Qual era a temperatura da água 15 minutos após apagado o fogo?

SOLUÇÃO: Pela Lei do Resfriamento de Newton, a função $D(t)$, em que $t = 0$ é o momento em que o fogo foi apagado, cumpre as hipóteses do Teorema de Caracterização das funções de tipo exponencial. Logo existe uma constante a, com $0 < a < 1$, tal que $D(t) = D_0 a^t$, onde $D_0 = D(0)$. Temos $D_0 = 100 - 30 = 70$. Logo $D(t) = 70a^t$. O problema nos diz que $D(5) = 60 - 30 = 30$. Portanto $70a^5 = 30$ e daí vem $a^5 = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$. Segue-se que $a^{15} = (a^5)^3 = \left(\frac{3}{7}\right)^3$ e que $D(15) = 70a^{15} = \frac{270}{49} \cong 5{,}5$. Portanto, 15 minutos após o fogo ser apagado, a temperatura da água é de aproximadamente $30 + 5{,}5 = 35{,}5$ graus.

Alternativamente, pode-se usar a informação sobre o decréscimo relativo constante de $D(t)$ diretamente. Temos $D(0) = 70$ e $D(5) = 40$. Portanto

$$\frac{D(0) - D(5)}{D(0)} = \frac{70 - 40}{70} = \frac{3}{7},$$

e, assim, $D(5) = \frac{4}{7} D(0)$. Pela propriedade mencionada,

$$\frac{D(5) - D(10)}{D(5)} = \frac{D(0) - D(5)}{D(0)} = \frac{3}{7},$$

o que nos conduz a $D(10) = \frac{4}{7} D(5) = (\frac{4}{7})^2 D(0)$ Em seguida usamos novamente a mesma informação, obtendo

$$\frac{D(10) - D(15)}{D(10)} = \frac{D(0) - D(5)}{D(0)} = \frac{3}{7},$$

o que nos conduz a $D(15) = (\frac{3}{7})^3 D(0)$, e o resultado segue.

2.

(a) **(5pts)** Dado um número $a > 0$, quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é a?

(b) **(10pts)** Justifique matematicamente por que não se pode responder o item (a) se trocarmos "mínimo" por "máximo".

SOLUÇÃO:

(a) Sejam x e y as dimensões de um retângulo de área $a > 0$. Então $xy = a$, ou seja, a média geométrica de x e y, dada por $\sqrt{xy}$, é igual a $\sqrt{a}$. A média geométrica $\frac{x+y}{2}$ desses dois números positivos é sempre maior do que ou igual a sua média geométrica, e a igualdade se dá se, e somente se, $x = y$ (o que, por conseguinte, resulta em $x = y = \sqrt{a}$). Então o perímetro $2x + 2y$, que é 4 vezes a média aritmética, é mínimo e igual a $4\sqrt{a}$ quando o retângulo é um quadrado de lados iguais a $\sqrt{a}$.

(b) Basta mostrar que não existe retângulo de perímetro máximo com área $a > 0$ fixada. Para isso, é suficiente mostrar que existem retângulos com essa área de perímetro tão grande quanto se queira. Por exemplo, para cada número natural $n \geq 2$ tomamos o retângulo R_n de lados $n\sqrt{a}$ e $\frac{\sqrt{a}}{n}$. Evidentemente a área desse retângulo é a. Por outro lado, seu perímetro é $2n\sqrt{a} + \frac{2}{n}\sqrt{a}$, que é maior do que $2n\sqrt{a}$. Assim, dado qualquer número $p > 0$ sempre se pode achar n tal que o perímetro de R_n é maior do que p, bastando tomar n tal que $2n\sqrt{a} > p$.

3.

Uma moeda honesta é lançada sucessivas vezes.

(a) (**10pts**) Se a moeda for lançada 4 vezes, qual é a probabilidade de que o número observado de caras seja ímpar? E se a moeda for lançada 5 vezes?
(b) (**5pts**) Observando o resultado do item (a), formule uma conjectura sobre a probabilidade de se observar um número ímpar de caras em n lançamentos da moeda.
(c) (**10pts**) Demonstre, utilizando indução finita, a conjectura do item (b).

SOLUÇÃO:

(a) Para **quatro** lançamentos, P(1 cara)= P(3 caras)= $\frac{1}{2^4}C_{4,1} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Logo, a probabilidade de um número ímpar de caras é $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
Para **cinco** lançamentos, P(1 cara)= $\frac{1}{2^5}C_{5,1} = \frac{5}{32}$, P(3 caras)= $\frac{1}{2^5}C_{5,3} = \frac{10}{32}$,
P(5 caras)= $\frac{1}{2^5}C_{5,5} = \frac{1}{32}$.
Logo, para 5 lançamentos a probabilidade de um número ímpar de caras é igual a $\frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$.
(b) A conjectura é que para todo n natural a probabilidade de se obter um número ímpar de caras em n lançamentos é $1/2$ (e, automaticamente, a probabilidade se obter um número par de caras também é igual a $1/2$).
(c) Verifiquemos se a conjectura é verdadeira para $n = 1$. A probabilidade de um número ímpar de caras em 1 lançamento é a probabilidade de ocorrer uma cara em 1 lançamento, e isso é exatamente igual a $1/2$. Portanto a conjectura vale neste caso. Agora supomos que a conjectura é verdadeira para n e vamos verificá-la para $n + 1$. Um número ímpar de caras em $n + 1$ lançamentos ou tem um número ímpar de caras nos n primeiros lançamentos e uma coroa no último lançamento ou tem um número par de caras nos n primeiros lançamentos e uma cara no último lançamento. Então P(n° ímpar de caras em $n + 1$ lançamentos) $=$ P(n° ímpar de caras em n lançamentos) $\cdot$ P(coroa) + P(n° par de caras em n lançamentos) $\cdot$ P(cara) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Obs. O que estamos buscando no item (c) é a soma dos coeficientes $C_{n,i}$, com i ímpar, dividida por $\frac{1}{2^n}$. Se olharmos para a expansão de $0 = (1-1)^n$, usando o binômio de Newton, veremos que ela é a soma dos coeficientes $C_{n,i}$, com i par, subtraída dos coeficientes $C_{n,i}$, com i ímpar. Como o resultado é zero, a soma dos coeficientes pares é igual à dos coeficientes ímpares. Por outro lado, $1 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}(1+1)^n$, e $(1+1)^n$ é a soma de todos os coeficientes $C_{n,i}$. Assim, a soma dos coeficientes ímpares, dividida por $\frac{1}{2^n}$, deve ser metade desse valor, isto é, $\frac{1}{2}$. Essa solução não usa indução finita diretamente.

4.

$ABCD$ é um quadrado, M é o ponto médio do lado BC e N é o ponto médio do lado CD. Os segmentos AM e BN cortam-se em P.

(a) **(5pts)** Mostre que $\frac{PB}{PN} = \frac{2}{3}$.
(b) **(5pts)** Calcule a razão $\frac{PA}{PM}$.
(c) **(5pts)** Se $AB = 1$ calcule a área do quadrilátero $PMCN$.

Obs: Para mostrar os itens (b) e (c) você pode usar o resultado do item (a) mesmo que não o tenha demonstrado.

SOLUÇÃO:

(a) Há várias maneiras de se calcular essa proporção. Vejamos duas:
Primeira: Bastará mostrar que $\frac{PB}{BN} = \frac{2}{5}$. Como AM é perpendicular a BN, então os triângulos BPM e BCN são semelhantes. Logo,
$$\frac{PB}{BC} = \frac{BM}{BN}.$$
Isso implica
$$\frac{PB}{BN} = \frac{BC \cdot BM}{BN^2}.$$
Como $BN^2 = NC^2 + BC^2 = \frac{5}{4}BC^2$ e $2BM = BC$, todos os termos do lado direito podem ser colocados em função de BC e a igualdade segue.
Segunda: De fato não é necessário usar a perpendicularidade, pois a afirmação vale mesmo que $ABCD$ seja um paralelogramo. Seja F o ponto médio de AB. O segmento NF corta AM em E que é o ponto médio de AM. Então $FE = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}BC$ e $EN = \frac{3}{4}BC$. Como os triângulos PMB e PEN são semelhantes, segue que
$$\frac{PB}{PN} = \frac{BM}{EN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{3}{4}BC} = \frac{2}{3}.$$
(b) Aproveitando a construção da segunda solução de (a), a mesma semelhança de triângulos nos dá $\frac{PM}{PE} = \frac{2}{3}$. E, sendo $AE = PE + PM$, segue que $AE = \left(\frac{3}{2} + 1\right)PM$.
$$\frac{PA}{PM} = \frac{AE + PE}{PM} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4.$$
(c) Usaremos [polígono Y] para denotar a área do polígono Y. Evidentemente $[BNC] = \frac{1}{4}$. Queremos calcular $[PMCN] = \frac{1}{4} - [BPM]$. Mas por causa da semelhança entre os triângulos BPM e BCN, compartilhando o ângulo oposto a PM e NC, respectivamente,
$$\frac{[BPM]}{[BCN]} = \frac{BP \cdot BM}{BN \cdot BC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

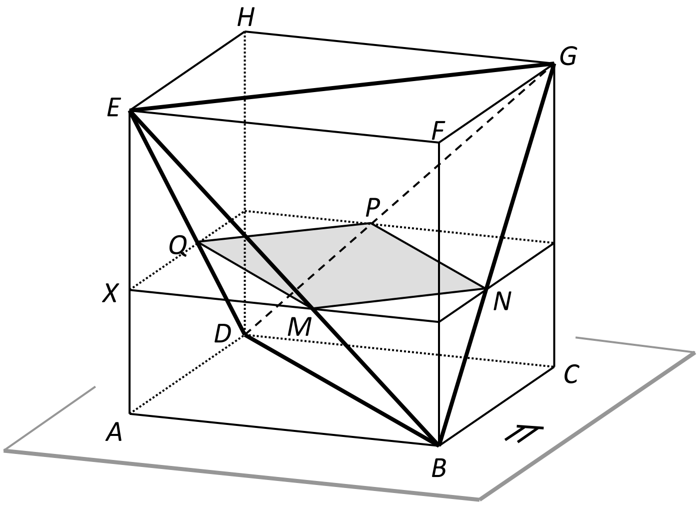
Portanto $[PMCN] = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

5.

Na figura abaixo, $ABCDEFGH$ é um cubo de aresta 1. AE, BF, CG e DH são arestas e a face $ABCD$ está contida em um plano horizontal Π. Seja T o tetraedro $BDEG$. Seja X um ponto da aresta AE (diferente de A e de E) e Π' o plano paralelo a Π que passa por X. A intersecção de Π' com T é o quadrilátero $MNPQ$, como mostrado na figura.

(a) (**5pts**) Mostre que $MNPQ$ é um retângulo.

(b) (**5pts**) Mostre que o perímetro de $MNPQ$ é igual a $2\sqrt{2}$, independentemente do ponto X.



SOLUÇÃO:

(a) Primeiro mostremos que MN e PQ são paralelos a EG e, portanto, são paralelos entre si. Mostraremos para MN, sendo análogo o caso de PQ. Mas isso segue de que $BM/BE = x = BN/BG$, que implica BMN semelhante a BEG e, portanto, MN paralelo a EG. Da mesma forma, demonstra-se que QM e PN são paralelos a DB. Isto mostra que os lados opostos de $MNPQ$ são iguais. Mas, de fato, são perpendiculares, pois EG é ortogonal a DB. Logo, $MNPQ$ é um retângulo.

(b) Como todas as diagonais das faces têm o mesmo tamanho, as faces do tetraedro T são triângulos equiláteros. Em particular, BEG é equilátero e, portanto, BMN é equilátero. Sendo assim, MN é igual a BN. Por outro lado, BDG também é equilátero, implicando que GPN também o é. Logo $PN = NG$. Então $MN + NP = BN + NG = BG = \sqrt{2}$. De maneira inteiramente análoga, $PQ + QM = \sqrt{2}$. Logo o perímetro de $MNPQ$ é igual a $MN + NP + PQ + QM = 2\sqrt{2}$.

6.

Um truque de adivinhação de números.

(a) **(5pts)** Descreva e justifique métodos práticos para obter os restos da divisão por 9, 10 e 11, respectivamente, de um número natural escrito no sistema decimal.

(b) **(5pts)** Ache as soluções mínimas de cada uma das seguintes congruências:

i. $110y \equiv 1 \bmod 9$

ii. $99y \equiv 1 \bmod 10$

iii. $90y \equiv 1 \bmod 11$

(c) **(10pts)** Um mágico pede a sua audiência para escolher um número natural M de pelo menos dois algarismos e menor do que 1000, e de lhe revelar apenas os restos r_9, r_{10} e r_{11} da divisão de M por 9, 10 e 11, respectivamente (tarefa fácil, pelo item (a)). Sem nenhuma outra informação ele consegue descobrir M. Explique como ele consegue fazer isto.

(d) **(5pts)** Supondo que a plateia tenha dado as seguintes informações ao mágico: $r_9 = 7$, $r_{10} = 8$ e $r_{11} = 9$, qual foi o valor de M que o mágico achou?

SOLUÇÃO:

(a) Escrevamos um número a na sua representação decimal: $a = a_r \cdots a_1 a_0$.
Restos da divisão por 9: Como $10^n = 1 \bmod 9$, temos que

$$a = a_r \cdot 10^r + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1 \equiv a_r + \cdots + a_1 + a_0 \bmod 9,$$

Logo o resto da divisão de a por 9 é igual ao resto da divisão de $b = a_r + \cdots + a_1 + a_0$ por 9. Podemos repetir o mesmo procedimento a b etc.
Restos da divisão por 10: Como $10^n = 0 \bmod 10$, temos que

$$a = a_r \cdot 10^r + \cdots + a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1 \equiv a_0 \bmod 10,$$

logo o resto da divisão de a por 10 é a_0.

Restos da divisão por 11: Como

$$10^n \equiv \begin{cases} 1 \bmod 11 \text{ se } n \text{ é par} \\ 10 \bmod 11 \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

temos que

$$a \equiv a_0 + 10a_1 + a_2 + 10a_3 + \cdots \bmod 11,$$

logo o resto da divisão de a por 11 é igual ao resto da divisão de $b = a_0 + 10a_1 + a_2 + 10a_3 + \cdots$ por 11, ao qual podemos aplicar novamente a regra acima etc.

(b) A congruência $110y \equiv 1 \bmod 9$ é equivalente à congruência $2y \equiv 1 \bmod 9$, cuja solução mínima é claramente $y_1 = 5$. A congruência $99y \equiv 1 \bmod 10$ é equivalente à congruência $9y \equiv 1 \bmod 10$, cuja solução mínima é claramente $y_2 = 9$. A congruência $90y \equiv 1 \bmod 11$ é equivalente à congruência $2y \equiv 1 \bmod 11$, cuja solução mínima é claramente $y_3 = 6$.

(c) O mágico tem que resolver o seguinte sistema de congruências:

$$\begin{cases} M \equiv r_1 \bmod 9 \\ M \equiv r_2 \bmod 10 \\ M \equiv r_3 \bmod 11 \end{cases}$$

O Teorema Chinês dos Restos nos diz que o sistema tem uma única solução módulo $9 \cdot 10 \cdot 11 = 990$, dada pela expressão

$$M \equiv (10 \cdot 11)y_1 r_9 + (9 \cdot 11)y_2 r_{10} + (9 \cdot 10)y_3 r_{11} \bmod 9 \cdot 10 \cdot 11,$$

em que y_1, y_2 e y_3 são as soluções das equações diofantinas do item (b). Logo

$$M \equiv 550 r_9 + 891 r_{10} + 540 r_{11} \bmod 990,$$

e só existe um valor de M satisfazendo essa equação e a restrição de que $10 \leq M \leq 999$.

(d) Temos que achar M natural em $[10,999]$ tal que

$$M \equiv 550 \cdot 7 + 891 \cdot 8 + 540 \cdot 9 \bmod 990 \equiv 988 \bmod 990.$$

Então $M = 988$.

Observação. O item (d) poderia ser resolvido de maneira menos educada como segue. Escrevamos o número $M = m_2 m_1 m_0$ na sua representação decimal. As informações sobre os restos dadas, $r_9 = 7$, $r_{10} = 8$ e $r_{11} = 9$, nos conduzem às seguintes congruências: $m_0 = 8$, $8 + m_1 + m_2 \equiv 7 \bmod 9$, e $8 + 10m_1 + m_2 \equiv 9 \bmod 11$, que resolvidas por tentativas nos dão o resultado $m_0 = 8$, $m_1 = 8$ e $m_2 = 9$.